２３

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

4 位置ベクトル（その４）

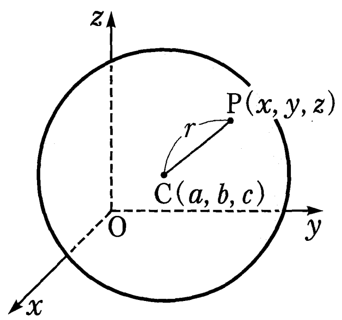
（１／１１）■　球面の方程式①　■

球面の方程式

★知識の整理★

【１】球面の方程式（ベクトル方程式）

空間において，定点Ｃからの距離が一定の値ｒであるような点Ｐの集合を，中心がＣ，半径がｒの球面，または，単に球という。



定点Ｃ($\vec{c}$)を中心とする半径ｒの球面のベクトル方程式を求めてみよう。

球面上の任意の点をＰ($\vec{p}$)とすると，

$|\overrightarrow{CP}|=r$ であるから，$|\vec{p}-\vec{c}|=r$　◀後－前

これが球面のベクトル方程式である。

これは内積を使うと，次のように表すこともできる。

両辺を２乗して，$|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2$

$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$　…①　◀これは平面における円のベクトル方程式とまったく同じ形である。

【２】球面の方程式（χ，ｙについての方程式）

ここで，Ｃ(ａ，ｂ，ｃ)とし，Ｐ(χ，ｙ，ｚ)とすると，①は次のように表すことができる。

$(\chi-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$　◀【注】

これは，中心Ｃ(ａ，ｂ，ｃ)，半径ｒの球面の方程式である。

（例）　中心が(３，２，－１)，半径が４の球面の方程式は，

$(\chi-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$

とくに，原点を中心とする半径ｒの球面の方程式は

$\chi^2+y^2+z^2=r^2$

である。

【注】$\vec{p}-\vec{c}=(\chi,\ y,\ z)-(a,\ b,\ c)$

$=(\chi-a,\ y-b,\ z-c)$　◀和(差)の成分

$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=(\chi-a,\ y-b,\ z-c)\cdot(\chi-a,\ y-b,\ z-c)$

$=(\chi-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$　◀成分の内積：同じ成分どうしの積の和

２３

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル
4 位置ベクトル（その４）
（２／１１）■　球面の方程式①　■

中心や半径がわかる場合

◇《中心や半径がわかる場合の球面の方程式》学力化➡　　／　，

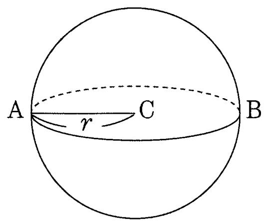
★解法の技術★

次のような球面の方程式を求めなさい。
(1)　点（２，－３，４）を中心とする半径５の球面
(2)　２点Ａ（２，０，－３），Ｂ（－２，６，１）を直径の両端とする球面

【考え方】球面の方程式には，次の２つの表し方がある。
・**標準形**　中心Ｃ（ａ，ｂ，ｃ），半径ｒの球面の方程式は
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$
◀中心と半径が見える形
・**一般形**　$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$
球の中心や半径のいずれかがわかる場合は，**標準形** を用いて考える。

［答　案］
(1)　1　（中心の座標と半径を公式に代入する）
$$(x-2)^2+\{y-(-3)\}^2+(z-4)^2=5^2$$
2　（式を整理して球面の方程式の形にする）
これを整理して，$(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=25$

(2)　1　（中心の座標を求める）
求める球面の中心を点Ｃとすると，点ＣはＡＢの中点であるから，Ｃの座標は，
$$C\left(\frac{2-2}{2},\ \frac{0+6}{2},\ \frac{-3+1}{2}\right)=C(0,\ 3,\ -1)$$
2　（半径を求める）
また，球面の半径は線分ＣＡの長さであるので，
$$CA=\sqrt{(2-0)^2+(0-3)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{17}$$
3　（中心の座標と半径を公式に代入する）
したがって，求める球面の方程式は，中心Ｃ（０，３，－１），半径$\sqrt{17}$より，
$$(x-0)^2+(y-3)^2+\{(z-(-1)\}^2=(\sqrt{17})^2$$
4　（式を整理して球面の方程式の形にする）
これを整理して，
$x^2+(y-3)^2+(z+1)^2=17$



ＣはＡＢの中点

２ ３

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

４ 位置ベクトル（その４）

（３／１１）■　球面の方程式①　■

◇《中心や半径がわかる場合の球面の方程式》**学力化**➡　　／　，

★理解のチェック★

次のような球面の方程式を求めなさい。

(1) 点(２，１，－２)を中心とする半径３の球面

(2) ２点Ａ(３，２，－４)，Ｂ(－３，－２，４)を直径の両端とする球面

(3) 点Ａ(１，－２，３)を中心とし，点Ｂ(２，－１，－１)を通る球面

【考え方】(3) 球面の半径は線分ＡＢの長さである。

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

２３

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

４ 位置ベクトル（その４）

（４／１１）■　球面の方程式①　■

◇《中心や半径がわかる場合の球面の方程式》**学力化**➡　　／　，

★演習★【１】

次のような球面の方程式を求めなさい。

(1) 原点を中心とする半径７の球面

(2) ２点Ａ(－１，－２，３)，Ｂ(１，４，－５)を直径の両端とする球面

(3) 点Ａ(３，１，０)を中心とし，点Ｂ(１，１，２)を通る球面

【考え方】(3) 球面の半径は線分ＡＢの長さである。

［答　　案］すべて：Ａオプション

｜メニューへ戻る｜

２３

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

４ 位置ベクトル（その４）

（５／１１）■　球面の方程式①　■

◇《中心や半径がわかる場合の球面の方程式》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

次のような球面の方程式を求めなさい。

(1) 点(－３，４，－１)を中心とする半径４の球面

(2) ２点Ａ(－２，１，３)，Ｂ(４，－５，７)を直径の両端とする球面

(3) 点Ａ(１，２，－１)を中心とし，点Ｂ(３，－１，３)を通る球面

［答　　案］すべて：Ａオプション

２３

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル
4 位置ベクトル（その４）
（６／１１）■　球面の方程式①　■

接する球面の方程式

◇《接する球面の方程式》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

次のような球面の方程式を求めなさい。
(1) 点（２，１，－３）を中心とし，ｙｚ平面に接する球面
(2) 点（５，１，４）を通り，３つの座標平面に接する。
(3) 中心（２，４，３），χ軸と接する球面

【考え方】(2)「３つの座標平面に接する」から，中心から各座標平面に下ろした垂線が半径。また，χ＞０，ｙ＞０，ｚ＞０である点を通ることから，中心の座標は半径ｒを用いて表すことができる。

［答　案］

(1) 1 （中心の座標を確認する）
求める球面の中心を点Ｃとすると，題意よりＣ（２，１，－３）。

2 （球面の半径を求める）
また，この球面はｙｚ平面に接するから，半径はχ座標の値である２。

3 （球面の方程式を求める）
したがって，求める球面の方程式は，中心Ｃ（２，１，－３），半径２より，
$(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=4$

◀ $(x-2)^2+(y-1)^2+\{z-(-3)\}^2=2^2$

(2) 1 （球面の半径と中心の座標を定義する）
球面が各座標平面に接し，かつ点（５，１，４）を通ることから，半径をｒとすると，中心の座標は（ｒ，ｒ，ｒ）と表される。

2 （rを用いて球面の方程式を表す）
ゆえに，求める球面の方程式は　$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$　…①
と表される。

3 （球面が点（5，1，4）を通るときのrの値を求める）
①の方程式が点（５，１，４）を通るから，$(5-r)^2+(1-r)^2+(4-r)^2=r^2$
これを整理すると，$r^2-10r+21=0$
左辺を因数分解して，$(r-3)(r-7)=0$ より，$r=3,\ 7$

4 （球面の方程式を求める）　◀答えは２通り
$r=3$ のとき，これを①に代入して，$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$
$r=7$ のとき，これを①に代入して，$(x-7)^2+(y-7)^2+(z-7)^2=49$

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

□ □ 【空間のベクトル　No.２３（６／１１）】 ―〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(3) $\boxed{1}$ （球面の半径を求める）

球面がχ軸と接するので，半径は中心（２，４，３）と接点（２，０，０）との距離だから，

$$\sqrt{(2-2)^2+(4-0)^2+(3-0)^2}=5$$

◀三平方の定理

$\boxed{2}$ （球面の方程式を求める）

したがって，求める球面の方程式は，中心（２，４，３），半径５より，

$$(\chi-2)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=25$$

◀ $r^2=5^2$

｜メニューへ戻る｜

２３

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

4 位置ベクトル（その４）

（７／１１）■　球面の方程式①　■

◇《接する球面の方程式》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

次のような球面の方程式を求めなさい。

(1) 点（２，３，４）を中心とし，ｚχ平面に接する球面

(2) 点（１，－２，５）を通り，３つの座標平面に接する。

(3) 中心（１，－５，２），ｙ軸と接する球面

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

２３

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

4 位置ベクトル（その４）

（８／１１）■　球面の方程式①　■

◇《接する球面の方程式》学力化➡　／　，

★演習★【３】

次のような球面の方程式を求めなさい。

(1) 点(３，－５，２)を中心とし，χｙ平面に接する球面

(2) 点(２，－１，－５)を通り，３つの座標平面に接する。

(3) 中心(－３，－２，４)，ｚ軸と接する球面

［答　　案］

２３

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

4 位置ベクトル（その４）

（９／１１）■　球面の方程式①　■

中心も半径もわからない場合

◇《中心も半径もわからない場合の球面の方程式》 学力化➡　／　，

★解法の技術★

(1) 次の（ｉ）～（iii）の方程式において，球面を表すものはどれか。

（ｉ）　$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=2$

（ii）　$x^2+y^2+z^2-10x+4z+29=0$

（iii）　$x^2+y^2+z^2+2x-6y+15=0$

(2) ４点（０，０，０），（６，０，０），（０，４，０），（０，０，－８）を通る球面の方程式を求めなさい。また，その中心の座標と半径を求めなさい。

【考え方】(1)　$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$を

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=p$

の形に変形し，ｐの値を調べればよい。

$p>0$…球面，$p=0$…１点，$p<0$…表す図形はない

(2)　**・標準形**　中心Ｃ（ａ，ｂ，ｃ），半径ｒの球面の方程式は

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$　◀中心と半径が見える形

・一般形　$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$

球の中心も半径もわからない場合は，**一般形**を用いて考える。

一般形の方程式に，与えられた４点の座標を代入すると，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄに関する連立方程式が得られる。

一般形で得られた球面の中心の座標と半径を求めるには，x，y，zのそれぞれについて平方完成し，標準形$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$の形を導く。

［答　　案］

(1) 1 （一般形を標準形に直す）

（ｉ）　$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=2$

$\underline{x^2-2x+1^2}-1^2+\underline{y^2+4y+2^2}-2^2+\underline{z^2-6z+3^2}-3^2=2$

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=2+1^2+2^2+3^2$

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16>0$　◀中心（1，－2，3），半径４の球面

（ii）　$x^2+y^2+z^2-10x+4z+29=0$

$\underline{x^2-10x+5^2}-5^2+y^2+\underline{z^2+4z+2^2}-2^2+29=0$

$(x-5)^2+y^2+(z+2)^2=5^2+2^2-29$

$(x-5)^2+y^2+(z+2)^2=0$　◀１点（5，0，－2）

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

（iii） $\chi^2+y^2+z^2+2\chi-6y+15=0$

$\underline{\chi^2+2\chi+1^2}-1^2+\underline{y^2-6y+3^2}-3^2+z^2+15=0$

$(\chi+1)^2+(y-3)^2+z^2=1^2+3^2-15$

$(\chi+1)^2+(y-3)^2+z^2=-5<0$ ◀表す図形はない。

$\boxed{2}$ （球面を表す方程式を選ぶ）

以上より，球面を表すものは，（ｉ）

(2) $\boxed{1}$ （球面の方程式を定義する）

求める方程式を $\chi^2+y^2+z^2+A\chi+By+Cz+D=0$ とする。 ◀一般形

$\boxed{2}$ （一般形を求める）

点（０，０，０）を通るから， $D=0$

点（６，０，０）を通るから， $36+6A+D=0$

点（０，４，０），通るから， $16+4B+D=0$

点（０，０，－８），通るから， $64-8C+D=0$

これらを解いて， $A=-6$， $B=-4$， $C=8$， $D=0$

よって，求める方程式は， $\chi^2+y^2+z^2-6\chi-4y+8z=0$

$\boxed{3}$ （標準形に変形する）

これを標準形に変形すると，

$\underline{\chi^2-6\chi+3^2}-3^2+\underline{y^2-4y+2^2}-2^2+\underline{z^2+8z+4^2}-4^2=0$

$(\chi-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=3^2+2^2+4^2$

$(\chi-3)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=29$ ◀ $r^2=(\sqrt{29})^2$

$\boxed{4}$ （球面の中心の座標と半径を読み取る）

よって，この球面の

中心の座標は （３，２，－４），半径は $\sqrt{29}$

｜メニューへ戻る｜

２３

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

4 位置ベクトル（その４）

（１０／１１）■　球面の方程式①　■

◇《中心も半径もわからない場合の球面の方程式》学力化➡　／　，

★理解のチェック★

(1) 次の（ⅰ）～（ⅲ）の方程式において，球面を表すものはどれか。

（ⅰ）　$x^2+y^2+z^2-4x+6y-3=0$

（ⅱ）　$x^2+y^2+z^2-y+3z+4=0$

（ⅲ）　$x^2+y^2+z^2+2x-2y-6z+11=0$

(2) ４点（１，１，１），（－１，１，－１），（－１，－１，０），（２，１，０）を通る球面の方程式を求めなさい。また，その中心の座標と半径を求めなさい。

［答　案］

｜メニューへ戻る｜

２３

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

4 位置ベクトル（その４）

（１１／１１）■　球面の方程式①　■

◇《中心も半径もわからない場合の球面の方程式》**学力化**➡　　／　，

★演習★【４】

４点（０，０，０），（１，－２，０），（３，－２，２），（３，０，０）を通る球面の方程式を求めなさい。また，その中心の座標と半径を求めなさい。

［答　　案］