１９

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

４ 位置ベクトル（その２）

（１／４）■　内積の利用①　■

垂直の証明①（位置ベクトルを使って）

◇《垂直の証明（位置ベクトルを使って）》学力化➡　／　，

★解法の技術★

四面体ＡＢＣＤにおいて，次のことが成り立つことを証明しなさい。
ＡＣ⊥ＢＤ，ＡＤ⊥ＢＣならば，ＡＢ⊥ＣＤ

【考え方】「垂直」を証明するには，「内積が０」になることを示せばよい。　◀大原則

つまり，③ＡＢ⊥ＣＤを証明するには，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ を示せばよい。

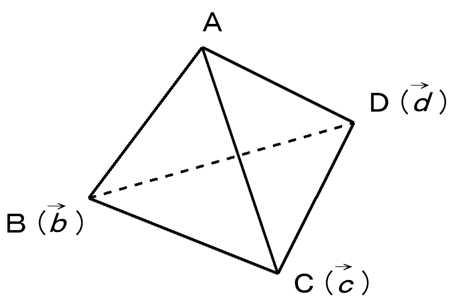
①ＡＣ⊥ＢＤ，②ＡＤ⊥ＢＣという条件の使い方を工夫する。

点Ａ，Ｂの位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ とすると，

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$　◀ 終点－始点（B　A）

［答　　案］

0（図をかく）



◀Aを基点として，位置ベクトルを表示する。（基点をOとするとめんどう！）

1（位置ベクトルを定義する）

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

2（条件ＡＣ⊥ＢＤを位置ベクトルで表す）

ＡＣ⊥ＢＤより，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=0$

$\vec{c}\cdot(\vec{d}-\vec{b})=0$

$\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　…①

◀BDを，Aを基点とした位置ベクトルで表すためにベクトルを変形する

$\overrightarrow{BD}=\underset{\vec{d}}{\overrightarrow{AD}}-\underset{\vec{b}}{\overrightarrow{AB}}$

（次のページへつづく）↗

□□　【空間のベクトル　No.１９（１／４）】　ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

3（条件ＡＤ⊥ＢＣを位置ベクトルで表す）

ＡＤ⊥ＢＣより，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$

$\vec{d}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

$\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{d}=0$　…②

◀BCを，Aを基点とした位置ベクトルで表すためにベクトルを変形する

$\overrightarrow{BC}=\underset{\vec{c}}{\overrightarrow{AC}}-\underset{\vec{b}}{\overrightarrow{AB}}$

4（結論ＡＢ⊥ＣＤを位置ベクトルで表す）

ここで，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$

$=\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})$

$=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}$　…③

◀CDを，Aを基点とした位置ベクトルで表すためにベクトルを変形する

$\overrightarrow{CD}=\underset{\vec{d}}{\overrightarrow{AD}}-\underset{\vec{c}}{\overrightarrow{AC}}$

5（位置ベクトルで結論（内積＝０）を導く）

①より，$\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}$

②より，$\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}$

であるから，③を①と②を使って置きかえると，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\vec{b}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{c}\cdot\vec{d}$

$=0$

6（結論を書く）

よって，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$となり，ＡＢ⊥ＣＤといえる。

19

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

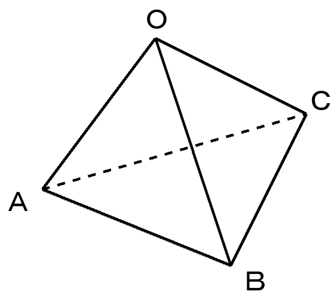
4 位置ベクトル（その２）

（２／４）■　内積の利用①　■

◇《垂直の証明(位置ベクトルを使って)》 **学力化**➡　　／　，

★理解のチェック★

四面体ＯＡＢＣにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。ＯＡ⊥ＢＣ，ＯＢ⊥ＣＡならば，ＯＣ⊥ＡＢであることをベクトルを用いて証明しなさい。



［答　　案］

授業で使う「テキスト(プリント)」には，
・解法の全体の方針や流れを示すガイド（【考え方】）と，
・答案作成フォーマット(共通テストに準じた誘導ガイド)
が印刷されています。

｜メニューへ戻る｜

１９

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

４ 位置ベクトル（その２）

（３／４）■　内積の利用①　■

◇《垂直の証明(位置ベクトルを使って)》学力化➡　／　,

★演習★【１】

四面体ＯＡＢＣにおいて，ＯＡ＝ＯＢ，$\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AB}$ とする。

(1)　ＡＣ＝ＢＣであることを証明しなさい。

(2)　△ＡＢＣの重心をＧとするとき，$\overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AB}$ であることを証明しなさい。

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

19

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

4 位置ベクトル（その２）

（４／４）■　内積の利用①　■

◇《垂直の証明(位置ベクトルを使って)》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

四面体ＯＡＢＣにおいて,

ＯＡ⊥ＢＣ　…①

ＯＢ⊥ＣＡ　…②

であるとき，次の等式が成り立つことを証明しなさい。

$$OA^2+BC^2=OB^2+CA^2=OC^2+AB^2$$

［答　　案］