１６

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

３ 空間のベクトルの内積（その２）

（１／６）■　空間ベクトルのなす角　■

空間ベクトルのなす角

★知識の整理★

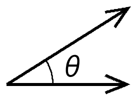
【１】内積と成分

空間のベクトルについても，平面上の場合と同様に，内積を成分で表すと次のようになる。

▼　内積と成分　▼

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

内積と成分の構造図



$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$

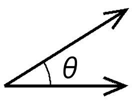
$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

＊成分を用いた内積の表し方…同じ成分どうしの積の和（内積は実数である）

（例）$\vec{a}=(2,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(-4,\ 5,\ 3)$のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$は，

内積と成分の構造図



$\vec{a}=(2,\ -2,\ -1)$

$\vec{b}=(-4,\ 5,\ 3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-4)+(-2)\times5+(-1)\times3=-21$

【２】内積の計算法則

空間のベクトルの内積についても，次の計算法則が成り立つ。

$\boxed{1}$ 交換法則　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$\boxed{2}$ 分配法則　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$

$\boxed{3}$ 結合法則　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

＊ベクトルの内積は，文字式と同じ計算法則であり，

$\boxed{1}$ 交換法則　$ab=ba$

$\boxed{2}$ 分配法則　$a(b+c)=ab+bc$

$a(b-c)=ab-bc$

$\boxed{3}$ 結合法則　$(ka)b=a(kb)=k(ab)$

が成り立つ。

１６

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

３ 空間のベクトルの内積（その２）

（２／６）■　空間ベクトルのなす角　■

◇《ベクトルのなす角》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

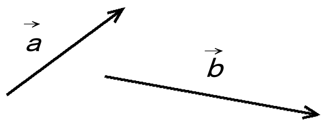
次の問いに答えなさい。

(1) 次の２つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の内積を求めなさい。
　$\vec{a}$＝(２，－１，－２)，$\vec{b}$＝(４，３，－５)

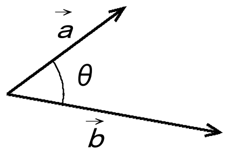
(2) ３点Ａ(１，３，２)，Ｂ(２，５，３)，Ｃ(－１，５，６)を頂点とする△ＡＢＣについて，∠ＢＡＣの大きさθを求めなさい。

【考え方】

★「なす角θ」とは？



➡なす角は，始点をあわせて考える。
（ただし，０°≦θ≦１８０°）



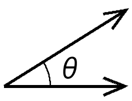
★「なす角θ」の求め方　　　　内積と成分の構造

２つのベクトルのなす角θは，それらのベクトルの内積と大きさがわかれば，「内積の定義」を使って求めることができる。（具体例は下の答案を参照）

【注意】以下の答案の中で示すベクトルの図は，「内積と成分の構造を表す一般モデル」であって，問題の実際の座標を表すものではありません。
このような一般モデル図を使うのは，すべての問題がまったく同じ思考プロセスで解けるからです。

［答　　案］

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$の内積を求める



$\vec{a}$＝(２，－１，－２)

$\vec{b}$＝(４，３，－５)

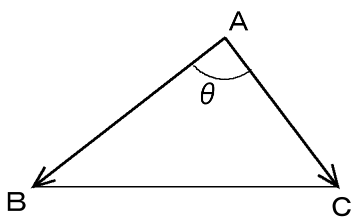
$\vec{a}\cdot\vec{b}$＝２×４＋(－１)×３＋(－２)×(－５)＝**１５**

(2) ∠ＢＡＣの大きさθを求める

・$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ の成分を求めると，

$\overrightarrow{AB}$＝(２－１，５－３，３－２)＝(１，２，１)

$\overrightarrow{AC}$＝(－１－１，５－３，６－２)＝(－２，２，４)

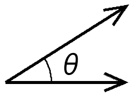


（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

□ □　【空間のベクトル　No. １６（１／６）】　ー〈２枚目／２枚〉

（前のページからのつづき）

・ 

$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ 1)$　　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 2,\ 4)$　　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+4^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-2)+2\times2+1\times4=6$

◀成分が分かると大きさが求まる。大きさは三平方の定理で求める。

◀内積は，同じ成分どうしをかけてたす（実数）

・ここで，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\ |\overrightarrow{AC}|\cos\theta$ であるから，　◀内積の定義

$$6=\sqrt{6}\times2\sqrt{6}\times\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{6}{\sqrt{6}\times2\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$\theta=\dfrac{\pi}{3}=60^\circ$

・よって，なす角は，$\angle BAC=\theta=60^\circ$

｜メニューへ戻る｜

１６

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

３ 空間のベクトルの内積（その２）

（３／６）■　空間ベクトルのなす角　■

◇《ベクトルのなす角》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

次の問いに答えなさい。

⑴ 次の２つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の内積およびなす角θを求めなさい。

① $\vec{a}$＝(２，２，１)，$\vec{b}$＝(４，４，２)

② $\vec{a}$＝(３，０，－３)，$\vec{b}$＝(２，２，－４)

③ $\vec{a}$＝(１，１，－２)，$\vec{b}$＝(２，－１，－１)

⑵ ３点Ａ(６，７，－８)，Ｂ(５，５，－６)，Ｃ(６，４，－２)を頂点とする△ＡＢＣについて，∠ＡＢＣの大きさθを求めなさい。

［答　　案］

１６

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

３ 空間のベクトルの内積（その２）

（４／６）■　空間ベクトルのなす角　■

◇《ベクトルのなす角》**学力化**➡　　／　，

★演習★【１】

次の問いに答えなさい。

(1) 次の２つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の内積およびなす角θを求めなさい。

① $\vec{a}$＝(１，２，－２)，$\vec{b}$＝(－１，１，－４)

② $\vec{a}$＝(３，－１，１)，$\vec{b}$＝(２，５，－１)

③ $\vec{a}$＝(３，－３，０)，$\vec{b}$＝(－２，４，－２)

(2) ３点Ａ(２，１，０)，Ｂ(０，２，１)，Ｃ(１，０，２)を頂点とする△ＡＢＣについて，∠ＣＡＢの大きさθを求めなさい。

［答　　案］

１６

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

３ 空間のベクトルの内積（その２）

（５／６）■　空間ベクトルのなす角　■

◇《ベクトルのなす角》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

次の問いに答えなさい。

(1) 次の２つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の内積およびなす角θを求めなさい。

① $\vec{a}=(1,\ -2,\ -3)$，$\vec{b}=(6,\ 2,\ -4)$

② $\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ \sqrt{6},\ -1)$

③ $\vec{a}=(3,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(-6,\ -2,\ -4)$

(2) ３点Ａ（０，２，１），Ｂ（０，－１，４），Ｃ（２，１，０）を頂点とする△ＡＢＣについて，次のものを求めなさい。

① 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

② ∠ＢＡＣの大きさθ_1

③ ∠ＡＢＣの大きさθ_2

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

１６

第３章　空間座標とベクトル　１・空間のベクトル

3 空間のベクトルの内積（その２）

（６／６）■　空間ベクトルのなす角　■

◇《ベクトルのなす角》学力化➡　／　，

★演習★【３】

２つのベクトル $\vec{a}=(1,\ \chi,\ 0)$，$\vec{b}=(\chi+1,\ 0,\ \chi-1)$ のなす角が４５°となるように，χ の値を定めなさい。

【考え方】$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 45^\circ$ だから，これを成分を用いて表す。

［答　　案］