発展

＊２５

第２章　平面上のベクトル　１・ベクトルとその演算

４　ベクトルの内積（その５）

【No.２５の後で学習☆発展問題】（１／３）

ベクトルの大きさと最小値（内積利用）

◇《ベクトルの大きさと最小値（内積利用）》 学力化➡　　／　，

★解法の技術★

ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$について，$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ であるとき，

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2)　ベクトル$2\vec{a}-3\vec{b}$の大きさを求めよ。

(3)　ベクトル$\vec{a}+t\vec{b}$の大きさが最小となるように実数ｔの値を定め，そのときの最小値を求めよ。

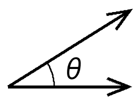
【考え方】大きさの問題は，２乗して展開すると，与えられた条件が使えるようになる。

(1)　$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\sim$，(2)　$|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=\sim$，(3)　$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=\sim$

(3)　はｔの２次式になるから，平方完成することで，最小値が求まる。

［答　　案］

《条件》



$\vec{a}=(*)$　$|\vec{a}|=\sqrt{3}$

$\vec{b}=(*)$　$|\vec{b}|=2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\sqrt{3}\times2\times\cos\theta=2\sqrt{3}\cos\theta$　…①

$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$　…②　　◀成分が与えられていないときは，内積の定義を使う。

①と②より，

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=(\sqrt{5})^2$　　◀２乗して展開すると，与えられた条件が使える形になる。

$(\sqrt{3})^2-2\times2\sqrt{3}\cos\theta+2^2=5$

$3-4\sqrt{3}\cos\theta+4=5$

$-4\sqrt{3}\cos\theta=-2$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$　…③

《問題》

(1)　①と③より，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\underline{1}$

（次のページへつづく）↗

□□　【ベクトルとその演算　No.２５ｓ（１／３）】　－〈２枚目／２枚〉

（前のページからのつづき）

(2)　$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|^2=4\left|\vec{a}\right|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\left|\vec{b}\right|^2$

$$=4\times\left(\sqrt{3}\right)^2-12\times1+9\times2^2$$
$$=12-12+36$$
$$=36$$

$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|\geqq0$ より，　◀絶対値は正

$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\underline{6}$

(3)　$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+2t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2\left|\vec{b}\right|^2$

$$=\left(\sqrt{3}\right)^2+2t\times1+t^2\times2^2$$
$$=3+2t+4t^2$$
◀ t の2次式
$$=4\left(t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)+3$$
◀平方完成
$$=4\left(t+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}+3$$
$$=4\left(t+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{4}$$

よって，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2$ は $t=-\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\frac{11}{4}$ をとる。

$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|\geqq0$ であるから，このとき $\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ も最小となる。

したがって，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|$ は $\underline{t=-\frac{1}{4}\text{ のとき最小値 }\frac{\sqrt{11}}{2}\text{ をとる。}}$

発展

＊２５

第２章　平面上のベクトル　１・ベクトルとその演算

4 ベクトルの内積（その５）

【№.２５の後で学習☆発展問題】（２／３）

◇《ベクトルの大きさと最小値（内積利用）》**学力化**➡　　／　，

★理解のチェック★

ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$について，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+3\vec{b}|=3$とする。ｔが実数全体を動くとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$の最小値は$\boxed{}$である。　［類　慶応大］

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

発展

＊２５

第２章　平面上のベクトル　１・ベクトルとその演算

４ ベクトルの内積（その５）

【№２５の後で学習☆発展問題】（３／３）

◇《ベクトルの大きさと最小値（内積利用）》**学力化**➡　　／　　，

◇発展演習◇【１】

$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=5$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{21}$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。ただし，ｔは実数とする。

［答　　案］