２３

第２章　平面上のベクトル　１・ベクトルとその演算

4 ベクトルの内積（その５）

（１／５）■　内積の計算法則①　■

内積の計算法則

★知識の整理★

【１】内積の計算法則

ベクトルの内積については，次の計算法則が成り立つ。

▼　内積の計算法則　▼

$\boxed{1}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$	交換法則
$\boxed{2}$	$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$	分配法則
$\boxed{3}$	$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$	
$\boxed{4}$	$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　（ｋは実数）	結合法則

★解法の技術★

上の内積の計算法則のうち，

$\boxed{2}$　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$　　分配法則

を証明しなさい。

【考え方】それぞれ左辺を成分で表し，変形して右辺を導きます。

内積の成分表示　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

［考える手順］

$\boxed{1}$ ベクトルを成分で表す

$\boxed{2}$ 内積を成分表示する

$\boxed{3}$ 成分を内積で表す

［答　　案］

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$とおく。

$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$であるから，　◀和の成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$と$\vec{b}+\vec{c}=(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$について，

左辺$=\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$

$=(a_1,\ a_2)\cdot(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$

$=a_1\cdot(b_1+c_1)+a_2\cdot(b_2+c_2)$　◀内積の成分表示

$=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2$　◀実数の分配法則

$=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)$　◀項の組みかえ

$=(a_1,\ a_2)\cdot(b_1,\ b_2)+(a_1,\ a_2)\cdot(c_1,\ c_2)$

$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

＝右辺

｜メニューへ戻る｜

4 ベクトルの内積（その５）

（２／５）■　内積の計算法則①　■

◇《内積の計算法則の証明》 学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

内積の計算法則のうち，次の法則を例題にならって証明しなさい。

1　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　　交換法則

3　$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$　　分配法則

4　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　（ｋは実数）　結合法則

【考え方】それぞれ左辺を成分で表し，変形して右辺を導きます。

内積の成分表示　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=(a_1,\ a_2)\cdot(b_1,\ b_2)$

$=a_1b_1+a_2b_2$　◀x成分の積＋y成分の積

［考える手順］

［答　案］　**読んで内容が理解できるだけでよい。**

ベクトルを成分で表す

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$とおく。

1　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　（交換法則）の証明

1　内積を成分表示する

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ と $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，

左辺$=\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=(a_1,\ a_2)\cdot(b_1,\ b_2)$

$=a_1b_1+a_2b_2$　◀内積の成分表示

$=b_1a_1+b_2a_2$　◀実数の乗法の交換法則

2　成分を内積で表す

$=(b_1,\ b_2)\cdot(a_1,\ a_2)$

$=\vec{b}\cdot\vec{a}$

＝右辺

3　$\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$　（分配法則）の証明

1　ベクトルを成分で表す

$\vec{b}-\vec{c}=(b_1-c_1,\ b_2-c_2)$であるから，　◀差の成分

2　内積を成分表示する

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$と$\vec{b}-\vec{c}=(b_1-c_1,\ b_2-c_2)$について，

左辺$=\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})$

$=(a_1,\ a_2)\cdot(b_1-c_1,\ b_2-c_2)$

$=a_1\cdot(b_1-c_1)+a_2\cdot(b_2-c_2)$　◀内積の成分表示

$=a_1b_1-a_1c_1+a_2b_2-a_2c_2$　◀実数の分配法則

$=(a_1b_1+a_2b_2)-(a_1c_1+a_2c_2)$　◀項の組みかえ

（次のページへつづく）↗

□ □ 【ベクトルとその演算　No.２３（２／５）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

③ 成分を内積で表す

$= (a_1,\ a_2)\cdot(b_1,\ b_2) - (a_1,\ a_2)\cdot(c_1,\ c_2)$

$= \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$

＝右辺

$\boxed{4}$ $\underline{(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b}) = k(\vec{a}\cdot\vec{b})}$　（kは実数）

① ベクトルを成分で表す

$k\vec{a} = k(a_1,\ a_2) = (ka_1,\ ka_2)$　◀差の成分

$k\vec{b} = k(b_1,\ b_2) = (kb_1,\ kb_2)$であるから，

[1] $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(k\vec{b})$ の証明

② 内積を成分表示する

$k\vec{a} = (ka_1,\ ka_2)$ と $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$について，

左辺＝ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}$

$= (ka_1,\ ka_2)\cdot(b_1,\ b_2)$

$= (ka_1)\cdot b_1 + (ka_2)\cdot b_2$　◀内積の成分表示

$= a_1\cdot(kb_1) + a_2\cdot(kb_2)$　◀実数の交換・結合法則

③ 成分を内積で表す

$= (a_1,\ a_2)\cdot(kb_1,\ kb_2)$

$= \vec{a}\cdot(k\vec{b})$

＝右辺

[2] $(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ の証明

② 内積を成分表示する

$k\vec{a} = (ka_1,\ ka_2)$ と $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$について，

左辺＝ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}$

$= (ka_1,\ ka_2)\cdot(b_1,\ b_2)$

$= (ka_1)\cdot b_1 + (ka_2)\cdot b_2$　◀内積の成分表示

$= k(a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2)$　◀実数の分配法則

③ 成分を内積で表す

$= k\{(a_1,\ a_2)\cdot(b_1,\ b_2)\}$

$= k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

＝右辺

注　同様にして，次の法則も成り立つ。

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{b}\cdot\vec{c}$

また，$\boxed{4}$が成り立つので，$k(\vec{a}\cdot\vec{b})$を$k\vec{a}\cdot\vec{b}$としてもよい。

２３

第２章　平面上のベクトル　１・ベクトルとその演算

4 ベクトルの内積（その５）

（３／５）■　内積の計算法則①　■

◇《内積の計算法則の証明》**学力化**➡　／　，

★解法の技術★

次の問いに答えなさい。

(1)　等式　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$ を証明しなさい。

(2)　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ を証明しなさい。

【考え方】

注意
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{a}&=|\vec{a}|\,|\vec{a}|\cos 0^\circ\\&=|\vec{a}|\,|\vec{a}|\times 1\\&=|\vec{a}|^2\end{aligned}$$

◀内積の定義

＊ $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}$ ではない！

注意　内積はかけ算ではないから，$\vec{a}\,\vec{b}$ とはならない。

［考える手順］

［答　　案］

(1)　左辺 $=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

1 内積の分配法則

$=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

2 内積の定義で表す

$=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$　◀内積の定義より

＝右辺

(2)　左辺 $=|\vec{a}+\vec{b}|^2$

1 内積の形に戻す

$=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

2 内積の分配法則

$=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

3 内積の定義で表す

$=|\vec{a}|^2+2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$　◀内積の定義より

＝右辺

｜メニューへ戻る｜

２３

第２章　平面上のベクトル　１・ベクトルとその演算

4 ベクトルの内積（その５）

（４／５）■　内積の計算法則①　■

◇《内積の計算法則の証明》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

次の等式を証明しなさい。

(1) $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}+3\vec{b})=|\vec{p}|^2-(\vec{a}-3\vec{b})\cdot\vec{p}-3\vec{a}\cdot\vec{b}$

(2) $(5\vec{a}-4\vec{b})\cdot(5\vec{a}+4\vec{b})=25|\vec{a}|^2-16|\vec{b}|^2$

(3) $|3\vec{a}-2\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

［考える手順］	［答　　案］
	(1) 左辺 $=(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}+3\vec{b})$
1 内積の分配法則	$=$
2 内積の定義で表す	
	(2) 左辺 $=(5\vec{a}-4\vec{b})\cdot(5\vec{a}+4\vec{b})$
1 内積の分配法則	$=$
2 内積の定義で表す	
	(3) 左辺 $=|3\vec{a}-2\vec{b}|^2$
1 内積の形に戻す	$=$
2 内積の分配法則	
3 内積の定義で表す	

23

第２章　平面上のベクトル　１・ベクトルとその演算

４ ベクトルの内積（その５）

（５／５）■　内積の計算法則①　■

◇《内積の計算法則の証明》 学力化➡　　／　，

★演習★【１】

次の等式を証明しなさい。

(1)　$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

(2)　$12|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2=|3\vec{a}+\vec{b}|^2+3|\vec{b}-\vec{a}|^2$

【考え方】(2)　「左辺から右辺を…」は，見たことがないので，「右辺から左辺を導く」ことにします。右辺は｜大きさ｜の２乗の和の形となっています。

［考える手順］

［答　　案］

(1)　左辺$=|\vec{a}-2\vec{b}|^2$

$=$

1 内積の形に戻す

2 内積の分配法則

3 内積の定義で表す

(2)　右辺$=|3\vec{a}+\vec{b}|^2+3|\vec{b}-\vec{a}|^2$

$=$

1 内積の形に戻す

2 内積の分配法則

3 内積の定義で表す