

2 3

第2章 平面上のベクトル 1・ベクトルとその演算

4 ベクトルの内積（その5）

(1/5) ■ 内積の計算法則① ■

内積の計算法則

★知識の整理★

【1】内積の計算法則

ベクトルの内積については、次の計算法則が成り立つ。

▼ 内積の計算法則 ▼

- | | | |
|---|---|------|
| 1 | $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ | 交換法則 |
| 2 | $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ | 分配法則 |
| 3 | $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$ | |
| 4 | $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (kは実数) | 結合法則 |

★解法の技術★

上の内積の計算法則のうち、

2 $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ 分配法則

を証明しなさい。

【考え方】それぞれ左辺を成分で表し、変形して右辺を導きます。

内積の成分表示 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

[考える手順]

1 ベクトルを成分で表す

2 内積を成分表示する

3 成分を内積で表す

[答 案]

$\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, $\vec{c} = (c_1, c_2)$ とおく。

$\vec{b} + \vec{c} = (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$ であるから、 ◀和の成分

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ と $\vec{b} + \vec{c} = (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$ について、

左辺 = $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$

$$= (a_1, a_2) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2)$$

$$= a_1 \cdot (b_1 + c_1) + a_2 \cdot (b_2 + c_2)$$

◀内積の成分表示

$$= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2$$

◀実数の分配法則

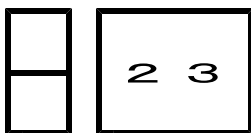
$$= (a_1 b_1 + a_2 b_2) + (a_1 c_1 + a_2 c_2)$$

◀項の組みかえ

$$= (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2)$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

= 右辺



第2章 平面上のベクトル 1・ベクトルとその演算

4 ベクトルの内積 (その5)

(2/5) ■ 内積の計算法則① ■

◇ 《内積の計算法則の証明》 **学力化** → /

★理解のチェック★

内積の計算法則のうち、次の法則を例題にならって証明しなさい。

- ① $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ 交換法則
- ③ $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$ 分配法則
- ④ $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (kは実数) 結合法則

【考え方】それぞれ左辺を成分で表し、変形して右辺を導きます。

内積の成分表示 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

◀ x成分の積+y成分の積

[考える手順]

ベクトルを成分で表す

① 内積を成分表示する

② 成分を内積で表す

① ベクトルを成分で表す

② 内積を成分表示する

[答 案] **読んで内容が理解できるだけでよい。**

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2), \vec{c} = (c_1, c_2)$ とおく。

① $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (交換法則) の証明

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ と $\vec{b} = (b_1, b_2)$ について、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 && \leftarrow \text{内積の成分表示} \\ &= b_1 a_1 + b_2 a_2 && \leftarrow \text{実数の乗法の交換法則} \\ &= (b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{a} \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

③ $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$ (分配法則) の証明

$\vec{b} - \vec{c} = (b_1 - c_1, b_2 - c_2)$ であるから、 ◀ 差の成分

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ と $\vec{b} - \vec{c} = (b_1 - c_1, b_2 - c_2)$ について、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \\ &= (a_1, a_2) \cdot (b_1 - c_1, b_2 - c_2) \\ &= a_1 \cdot (b_1 - c_1) + a_2 \cdot (b_2 - c_2) && \leftarrow \text{内積の成分表示} \\ &= a_1 b_1 - a_1 c_1 + a_2 b_2 - a_2 c_2 && \leftarrow \text{実数の分配法則} \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 c_1 + a_2 c_2) && \leftarrow \text{項の組みかえ} \end{aligned}$$

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【ベクトルとその演算 No. 23 (2/5)】 - 〈2枚目/2枚〉

➔ (前のページからのつづき)

[3] 成分を内積で表す

$$\begin{aligned}
 &= (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) - (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2) \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} \\
 &= \text{右辺}
 \end{aligned}$$

[1] ベクトルを成分で表す

$$[4] \quad \underline{(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})} \quad (k \text{ は実数})$$

$$k\vec{a} = k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2) \quad \leftarrow \text{差の成分}$$

$$k\vec{b} = k(b_1, b_2) = (kb_1, kb_2) \text{ であるから,}$$

[1] $\underline{(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})}$ の証明

[2] 内積を成分表示する

$$k\vec{a} = (ka_1, ka_2) \text{ と } \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ について,}$$

$$\text{左辺} = (k\vec{a}) \cdot \vec{b}$$

$$= (ka_1, ka_2) \cdot (b_1, b_2)$$

$$= (ka_1) \cdot b_1 + (ka_2) \cdot b_2 \quad \leftarrow \text{内積の成分表示}$$

$$= a_1 \cdot (kb_1) + a_2 \cdot (kb_2) \quad \leftarrow \text{実数の交換・結合法則}$$

$$= (a_1, a_2) \cdot (kb_1, kb_2)$$

$$= \vec{a} \cdot (k\vec{b})$$

$$= \text{右辺}$$

[3] 成分を内積で表す

[2] $\underline{(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})}$ の証明

[2] 内積を成分表示する

$$k\vec{a} = (ka_1, ka_2) \text{ と } \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ について,}$$

$$\text{左辺} = (k\vec{a}) \cdot \vec{b}$$

$$= (ka_1, ka_2) \cdot (b_1, b_2)$$

$$= (ka_1) \cdot b_1 + (ka_2) \cdot b_2 \quad \leftarrow \text{内積の成分表示}$$

$$= k(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2) \quad \leftarrow \text{実数の分配法則}$$

$$= k\{(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)\}$$

$$= k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$= \text{右辺}$$

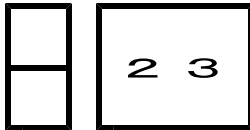
[3] 成分を内積で表す

注 同様にして、次の法則も成り立つ。

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c}$$

また、[4]が成り立つので、 $k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ を $k\vec{a} \cdot \vec{b}$ としてもよい。



第2章 平面上のベクトル 1・ベクトルとその演算

4 ベクトルの内積（その5）

(3/5) ■ 内積の計算法則① ■

◇ 《内積の計算法則の証明》 **学力化** → /

★解法の技術★

次の問いに答えなさい。

- (1) 等式 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ を証明しなさい。
 (2) $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ を証明しなさい。

【考え方】 **注意** $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ$ ◀内積の定義
 $= |\vec{a}| |\vec{a}| \times 1$
 $= |\vec{a}|^2$ * $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ ではない!

注意 内積はかけ算ではないから、 $\vec{a} \vec{b}$ とはならない。

[考える手順]

[答 案]

1 内積の分配法則

$$\begin{aligned} (1) \text{ 左辺} &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

2 内積の定義で表す

$$\begin{aligned} &= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \quad \leftarrow \text{内積の定義より} \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

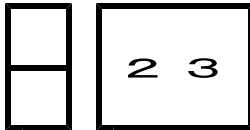
1 内積の形に戻す

$$\begin{aligned} (2) \text{ 左辺} &= |\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

2 内積の分配法則

3 内積の定義で表す

$$\begin{aligned} &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \quad \leftarrow \text{内積の定義より} \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$



第2章 平面上のベクトル 1・ベクトルとその演算

4 ベクトルの内積（その5）

(4/5) ■ 内積の計算法則① ■

◇ 《内積の計算法則の証明》 **学力化** → /

★理解のチェック★

次の等式を証明しなさい。

(1) $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} + 3\vec{b}) = |\vec{p}|^2 - (\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot \vec{p} - 3\vec{a} \cdot \vec{b}$

(2) $(5\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (5\vec{a} + 4\vec{b}) = 25|\vec{a}|^2 - 16|\vec{b}|^2$

(3) $|3\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$

[考える手順]

1 内積の分配法則

2 内積の定義で表す

1 内積の分配法則

2 内積の定義で表す

1 内積の形に戻す

2 内積の分配法則

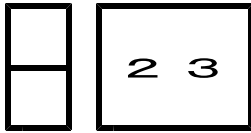
3 内積の定義で表す

[答 案]

(1) 左辺 $= (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} + 3\vec{b})$
=

(2) 左辺 $= (5\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (5\vec{a} + 4\vec{b})$
=

(3) 左辺 $= |3\vec{a} - 2\vec{b}|^2$
=



第2章 平面上のベクトル 1・ベクトルとその演算

4 ベクトルの内積（その5）

(5 / 5) ■ 内積の計算法則① ■

◇ 《内積の計算法則の証明》 **学力化** → /

★演習★【1】

次の等式を証明しなさい。

(1) $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$

(2) $12|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 = |3\vec{a} + \vec{b}|^2 + 3|\vec{b} - \vec{a}|^2$

【考え方】(2) 「左辺から右辺を…」は、見たことがないので、「右辺から左辺を導く」ことにします。右辺は「大きさ」の2乗の和の形となっています。

[考える手順]

1 内積の形に戻す

2 内積の分配法則

3 内積の定義で表す

1 内積の形に戻す

2 内積の分配法則

3 内積の定義で表す

[答 案]

(1) 左辺 = $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2$
=

(2) 右辺 = $|3\vec{a} + \vec{b}|^2 + 3|\vec{b} - \vec{a}|^2$
=