｜メニューへ戻る｜

S_nを含む漸化式

◇《S_nを含む漸化式》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

> 数列｛a_n｝の初項から第ｎ項までの和をS_nとするとき，
>
> $S_n = 2a_n + 4n - 3$
>
> を満たしている。
>
> (1)　a_{n+1}とa_nとの関係式を求めなさい。　◀漸化式　$a_{n+1} = a_n$ ～
>
> (2)　一般項a_nを求めなさい。　（$S_{n+1} - S_n$）◀スーパーテクニック

【考え方】a_nとS_nの関係式が与えられているから，まず **一方だけで表す** ために，

$n \geqq 2$のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$，　$a_1 = S_1$

を利用します。

ここでは，$n \geqq 2$と$n = 1$の場合分けをしなくても済むように，

漸化式$S_n = 2a_n + 4n - 3$でｎの代わりに$n+1$とおいてS_{n+1}を含む式を作り，

辺々を引くことによってS_nを消去し，数列｛a_n｝の漸化式を作ります。

手順をまとめると，

$\boxed{1}$　$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$から，a_n，a_{n+1}の漸化式を作る。

理由：
$$\left(\begin{array}{rl} S_{n+1} = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} \\ -)\quad S_n = & a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ \hline S_{n+1} - S_n = & \quad\text{消える}\quad a_{n+1} \end{array}\right)$$

$\boxed{2}$　$a_1 = S_1$を利用し，a_1を求める。

$\boxed{3}$　数列｛a_n｝の漸化式から，一般項を求める。

［考える手順］　［答　案］

(1)　$S_n = 2a_n + 4n - 3$　…①

$\boxed{1}$　ｎをｎ＋１に置き換え

①で，$S_{n+1} = 2a_{n+1} + 4(n+1) - 3$　◀①のｎにｎ＋１を代入

$= 2a_{n+1} + 4n + 1$　…②

$\boxed{2}$　｛a_n｝の漸化式を作る

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$　であるから，　◀スーパーテクニック

②－①より，

$a_{n+1} = (2a_{n+1} + 4n + 1) - (2a_n + 4n - 3)$

$= 2a_{n+1} - 2a_n + 4$　▲代入により，a_{n+1}とa_nだけの式にする。

移項して，整理すると，

$\underline{a_{n+1} = 2a_n - 4}$　…③　◀特性方程式型漸化式になった

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

（前のページからのつづき）

(2)　数列 $\{a_n\}$ について，

3 初項を求める

$n=1$ のとき，

①より，

$a_1=S_1=2a_1+4\cdot1-3$　　◀条件式の利用

$a_1=2a_1+1$

$a_1=-1$

◀ $a_1-2a_1=1$

$-a_1=1$

$a_1=-1$

4 一般項 a_n を求める

【注】別解あり（欄外）

③が，

$a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$　…④

と変形できたとする。

▼以降は特性方程式型漸化式を求める手順と同じ

→No.3（4／9）参照

③－④より，

$$
\begin{array}{rrl}
 & a_{n+1} & =2a_n-4 \\
-) & a_{n+1}-\alpha & =2(a_n-\alpha) \\
\hline
 & \alpha & =-4+2\alpha \\
 & \alpha & =4
\end{array}
$$

◀これが特性方程式！

④で，$\alpha=4$ のとき，

$a_{n+1}-4=2(a_n-4)$　…⑤　　◀等比型漸化式になった！

⑤から，数列 $\{a_n-4\}$ は，

初項　$a_1-4=-1-4=-5$，　公比　2

の等比数列であるから，一般項は，

$a_1-4=-5\cdot2^{n-1}$　　◀等比数列の一般項の公式より

-4 を移項して，

$\underline{a_n=-5\cdot2^{n-1}+4}$

4 の別解

③において，a_{n+1} と a_n を χ とおいた方程式（特性方程式）を解くと，

$\underbrace{a_{n+1}}_{\chi}=2\underbrace{a_n}_{\chi}-4$　…③

$\chi=2\chi-4$ より，$\chi=4$　…④

③の両辺から④を引いて，

$a_{n+1}-4=2a_n-4-4$

$a_{n+1}-4=2(a_n-4)$　…⑤

｜メニューへ戻る｜

１１

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その７）

（２／６）■　S_nを含む漸化式　■

◇《S_nを含む漸化式》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

数列｛a_n｝の初項から第ｎ項までの和S_nが，一般項a_nを用いて，
$S_n=-2a_n-2n+5$と表されるとき，一般項a_nをｎを用いて表しなさい。

［答　　案］

メニューへ戻る

１　１

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その７）

（３／６）■　S_nを含む漸化式　■

◇《S_nを含む漸化式》学力化➡　／　，

★演習★【１】

数列｛a_n｝の初項から第ｎ項までの和S_nが，一般項a_nを用いて，$S_n=2a_n+n$と表されるとき，一般項a_nをｎを用いて表しなさい。

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

１　１

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その７）

（４／６）■　S_nを含む漸化式　■

◇《S_nを含む漸化式》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

数列｛a_n｝の初項から第ｎ項までの和S_nが，

$$S_n = n - 2a_n$$

で表されるとき，a_nをｎの式で表しなさい。

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

１１

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その７）

（５／６）■　S_nを含む漸化式　■

◇《S_nを含む漸化式》学力化➡　／　，

★演習★【３】

数列｛a_n｝の初項から第ｎ項までの和をS_nが次の式を満たすとき，数列｛a_n｝の一般項a_nを求めなさい。

$$S_n = 1 - a_n$$

［答　　案］

１１

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その７）

（６／６）■　S_nを含む漸化式　■

◇《S_nを含む漸化式》学力化➡　　／　，

★演習★【４】

数列｛a_n｝の初項から第ｎ項までの和をS_nとするとき，

$$2S_n=3a_n-2^n$$

を満たしている。

(1)　a_{n+1}とa_nの関係式を求めなさい。

(2)　一般項a_nを求めなさい。

［答　　案］