

S_n を含む漸化式

◇ 《 S_n を含む漸化式》 **学力化** → / .

★解法の技術★

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき、

$$S_n = 2a_n + 4n - 3$$
 を満たしている。
 (1) a_{n+1} と a_n との関係式を求めなさい。 ◀ 漸化式 $a_{n+1} = a_n \sim$
 (2) 一般項 a_n を求めなさい。 ($S_{n+1} - S_n$) ◀ スーパーテクニック

【考え方】 a_n と S_n の関係式が与えられているから、まず 一方だけで表す ために、

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1}, \quad a_1 = S_1$$

を利用します。

ここでは、 $n \geq 2$ と $n = 1$ の場合分けをしなくても済むように、

漸化式 $S_n = 2a_n + 4n - 3$ で n の代わりに $n + 1$ とおいて S_{n+1} を含む式を作り、
 辺々を引くことによって S_n を消去し、数列 $\{a_n\}$ の漸化式 を作ります。

手順をまとめると、

① $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ から、 a_n, a_{n+1} の漸化式を作る。

理由：
$$\left(\begin{array}{r} S_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} \\ -) \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ \hline S_{n+1} - S_n = \quad \quad \quad \text{消える} \quad \quad \quad a_{n+1} \end{array} \right)$$

② $a_1 = S_1$ を利用し、 a_1 を求める。

③ 数列 $\{a_n\}$ の漸化式から、一般項を求める。

[考える手順]

[答 案]

① n を $n + 1$ に置き換え

(1) $S_n = 2a_n + 4n - 3 \quad \dots \textcircled{1}$

①で、 $S_{n+1} = 2a_{n+1} + 4(n+1) - 3 \quad \leftarrow \textcircled{1}$ の n に $n+1$ を代入
 $= 2a_{n+1} + 4n + 1 \quad \dots \textcircled{2}$

② $\{a_n\}$ の漸化式を作る

$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ であるから、 ◀ スーパーテクニック
 ② - ① より、

$$a_{n+1} = (2a_{n+1} + 4n + 1) - (2a_n + 4n - 3)$$

$$= 2a_{n+1} - 2a_n + 4$$

▲ 代入により、
 a_{n+1} と a_n だけの式にする。

移項して、整理すると、

$a_{n+1} = 2a_n - 4$ ◀ 特性方程式型漸化式になった

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【3・漸化式と数学的帰納法 No. 1 1 (1/6)】 - <2枚目/2枚>

➔ (前のページからのつづき)

③ 初項を求める

(2) 数列 $\{a_n\}$ について,

$n = 1$ のとき,

①より,

$$a_1 = S_1 = 2a_1 + 4 \cdot 1 - 3$$

$$a_1 = 2a_1 + 1$$

$$a_1 = -1$$

◀条件式の利用

$$\begin{cases} a_1 - 2a_1 = 1 \\ -a_1 = 1 \\ a_1 = -1 \end{cases}$$

④ 一般項 a_n を求める

【注】別解あり(欄外)

③が,

$$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha) \quad \dots \textcircled{4}$$

と変形できたとする。

▼以降は特性方程式型漸化式を求める手順と同じ

→No.3(4/9)参照

③-④より,

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n - 4 \\ -) a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha) \\ \hline \alpha = -4 + 2\alpha \\ \alpha = 4 \end{cases}$$

◀これが特性方程式!

④で, $\alpha = 4$ のとき,

$$a_{n+1} - 4 = 2(a_n - 4) \quad \dots \textcircled{5}$$

◀等比型漸化式になった!

⑤から, 数列 $\{a_n - 4\}$ は,

$$\text{初項 } a_1 - 4 = -1 - 4 = -5, \quad \text{公比 } 2$$

の等比数列であるから, 一般項は,

$$a_1 - 4 = -5 \cdot 2^{n-1}$$

◀等比数列の一般項の公式より

-4 を移項して,

$$\underline{a_n = -5 \cdot 2^{n-1} + 4}$$

④ の別解

③において, a_{n+1} と a_n を χ とおいた方程式(特性方程式)を解くと,

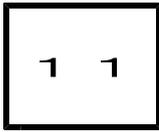
$$\underbrace{a_{n+1}}_{\chi} = 2 \underbrace{a_n}_{\chi} - 4 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\chi = 2\chi - 4 \text{ より, } \chi = 4 \quad \dots \textcircled{4}$$

③の両辺から④を引いて,

$$a_{n+1} - 4 = 2a_n - 4 - 4$$

$$a_{n+1} - 4 = 2(a_n - 4) \quad \dots \textcircled{5}$$



第 1 章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式 (その 7)

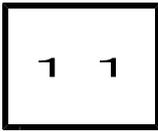
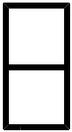
(2 / 6) ■ S_n を含む漸化式 ■

◇ 《 S_n を含む漸化式》 **学力化** → / ,

★理解のチェック★

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が、一般項 a_n を用いて、
 $S_n = -2a_n - 2n + 5$ と表されるとき、一般項 a_n を n を用いて表しなさい。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その7)

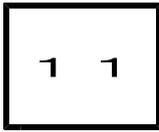
(3/6) ■ S_n を含む漸化式 ■

◇ 《 S_n を含む漸化式》 **学力化** → / ,

★演習★【1】

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が、一般項 a_n を用いて、 $S_n = 2a_n + n$ と表されるとき、一般項 a_n を n を用いて表しなさい。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その7)

(4/6) ■ S_n を含む漸化式 ■

◇ 《 S_n を含む漸化式》 **学力化** → / ,

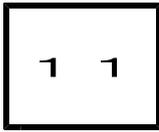
★演習★【2】

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が,

$$S_n = n - 2a_n$$

で表されるとき, a_n を n の式で表しなさい。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その7)

(5/6) ■ S_n を含む漸化式 ■

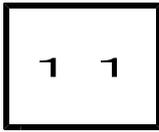
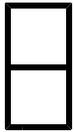
◇ 《 S_n を含む漸化式》 **学力化** → / ,

★演習★【3】

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n が次の式を満たすとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい。

$$S_n = 1 - a_n$$

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その7)

(6/6) ■ S_n を含む漸化式 ■

◇ 《 S_n を含む漸化式》 **学力化** → /

★演習★【4】

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき、

$$2S_n = 3a_n - 2^n$$

を満たしている。

- (1) a_{n+1} と a_n の関係式を求めなさい。
- (2) 一般項 a_n を求めなさい。

[答 案]