

第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その6)

(1/4) ■ n の整式を含む漸化式Ⅲ ■

$$a_{n+1} = f(n)a_n + q \text{ 型}$$

◇ 《 $a_{n+1} = f(n)a_n + q$ 型》 学力化 → / .

★解法の技術★

$a_1 = 1, \quad n a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$
 で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい。

【考え方】まず、定義式の $n a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$ は、両辺を n で割ると、
 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + \frac{1}{n}$ 型に変形できることを確認しておく。

漸化式では、

1 $n+1$ 関係の式を左辺に、 n 関係の式を右辺にまとめ、▲【2】(1) $n+2$, (2) $2n+3$ なども含めて…

等差型、等比型、特性方程式型などの漸化式(基本形)へもっていき、

▲上の問題の漸化式は、階差型になる。

2 その一般項を求め、

3 一般項 a_n を求める、

のが基本の流れである。

[答 案]

0 (定義)

$$a_1 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$n a_{n+1} = (n+1)a_n + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

1 ($n+1$ は左辺、 n は右辺にまとめる)②の両辺を $n(n+1)$ でわると、

$$\frac{n a_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{(n+1)a_n}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}$$

約分して、

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \quad \dots \textcircled{3}$$

◀【注】②より、 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + f(x)$ の形を作る。左辺の分母が $n+1$ にならないときは、

(No.9 (3/4) と (4/4) の問題)

分母の平均値で両辺をわる。

◀漸化式(基本形)にすることをめざす

◀階差型漸化式になった!

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【3・漸化式と数学的帰納法 No. 9 (1/4)】 - 〈2枚目/2枚〉

➔ (前のページからのつづき)

2 (数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ の一般項を求める)③より, $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$ であるから,

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} \text{ とおくと, } b_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \dots \textcircled{4}$$

◀ 階差数列の一般項

④より, 数列 $\{b_n\}$ は, 数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ の階差数列であるから, $n \geq 2$ のとき,

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= \frac{1}{1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

◀ 部分分数に分けた→No.6(1/8)を参照

$$= 1 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right)$$

◀ Σ の分配法則

$$= 1 + \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) \right\}$$

◀ $(n-1)$ 項までの和

$$= 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

◀ () 内の後項は-であること注意

$$= 2 - \frac{1}{n} \quad \dots \textcircled{5}$$

 $n = 1$ のとき,⑤に $n = 1$ を代入すると,

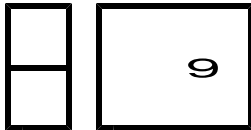
$$\frac{a_1}{1} = 2 - \frac{1}{1} = 1$$

となり, $n = 1$ のときも成り立つ。

$$\text{よって, } \frac{a_n}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

3 (一般項 a_n を求める)両辺に n をかけて,

$$\underline{a_n = 2n - 1}$$



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その6)

(2/4) ■ nの整式を含む漸化式Ⅲ ■

◇ 《 $a_{n+1} = f(n)a_n + q$ 型》**学力化** → /

-----★理解のチェック★-----

$$a_1 = 2, \quad n a_{n+1} = (n+1)a_n + 3$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい。

[答 案]

0 (定義)

$$a_1 = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$n a_{n+1} = (n+1)a_n + 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

1 (n+1は左辺, nは右辺にまとめる)

②の両辺を $n(n+1)$ でわると,

◀ $a_{n+1} = f(n)a_n + q$ 型

◀ 漸化式(基本形)にすることをめざす

◀ ②より, $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + f(n)$ の形を作る。

◀ 階差型漸化式になった!

2 (数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ の一般項を求める)

◀ 階差数列の一般項

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【 3 ・ 漸化式と数学的帰納法 No. 9 (2 / 4) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚 〉

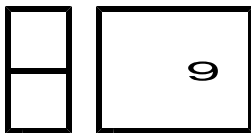
↗ (前のページからのつづき)

$n \geq 2$ のとき,

$n = 1$ のとき,

よって, $\frac{a_n}{n} =$

3 (一般項 a_n を求める)



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その6)

(3/4) ■ nの整式を含む漸化式Ⅲ ■

◇ 《 $a_{n+1} = f(n)a_n + q$ 型》 **学力化** → /

★演習★【1】

$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n + 1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $\frac{a_n}{n(n+1)} = b_n$ とおくと、 b_{n+1} を b_n と n の式で表しなさい。

(2) a_n を n の式で表しなさい。

* 「置き換え」を使って解く問題です。

[答 案]

(1) **0** (定義)

$$a_1 = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+2}{n}a_n + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

◀ $a_{n+1} = f(n)a_n + q$ 型

1 ($n+1$ は左辺、 n は右辺にまとめる)

◀ 漸化式(基本形)にすることをめざす

◀ ②より、 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + f(n)$ の形を作る。

◀ 左辺に $n+1$ でない式がある!

◀ 分母の平均値で割る。

◀ 階差型漸化式になった!

★

$$\frac{a_n}{n(n+1)} = b_n \text{ とおくと,}$$

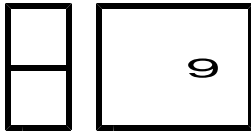
(次のページへつづく) →

□ □ 【 3 ・ 漸化式と数学的帰納法 No. 9 (3 / 4) 】 - 〈 3 枚目 / 3 枚 〉

↗ (前のページからのつづき)

$$\text{よって, } \frac{a_n}{n(n+1)} =$$

3 (一般項 a_n を求める)



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その6)

(4/4) ■ nの整式を含む漸化式Ⅲ ■

◇ 《 $a_{n+1} = f(n)a_n + q$ 型》**学力化** → /

★演習★【2】

$a_1 = \frac{1}{2}$, $n a_{n+1} = (n+2)a_n + 1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

- (1) $a_n = n(n+1)b_n$ とおくと、 b_{n+1} を b_n と n の式で表しなさい。
- (2) a_n を n の式で表しなさい。

* 「置き換え」を使って解く問題です。

【考え方】 (1) $a_n = n(n+1)b_n$ は、 $\frac{a_n}{n(n+1)} = b_n$ の形で使います。

[答 案]

(1) **0** (定義)

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$n a_{n+1} = (n+2)a_n + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

1 ($n+1$ は左辺、 n は右辺にまとめる)

◀ $a_{n+1} = f(n)a_n + q$ 型

◀ 漸化式(基本形)にすることをめざす

◀ ②より、 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + f(n)$ の形を作る。

★

③で、 $\frac{a_n}{n(n+1)} = b_n$ とおくと、 $\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = b_{n+1}$ と表せるから、

(次のページへつづく) →

□ □ 【 3 ・ 漸化式と数学的帰納法 No. 9 (4 / 4) 】 - 〈 2 枚目 / 3 枚〉

↗ (前のページからのつづき)

- (2) 2 (数列 $\{\frac{a_n}{n(n+1)}\}$ の一般項を求める)

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【 3 ・ 漸化式と数学的帰納法 No. 9 (4 / 4) 】 - 〈 3 枚目 / 3 枚 〉

↗ (前のページからのつづき)

$$\text{よって, } \frac{a_n}{n(n+1)} =$$

3 (一般項 a_n を求める)