｜メニューへ戻る｜

9

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その６）

（１／４）■　ｎの整式を含む漸化式Ⅲ　■

$a_{n+1}=f(n)a_n+q$ 型

◇《$a_{n+1}=f(n)a_n+q$ 型》**学力化**➡　　／　，

★解法の技術★

> $a_1=1$，　　$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$
> で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい。

【考え方】まず，定義式の $na_{n+1}=(n+1)a_n+1$ は，両辺をｎで割ると，
$a_{n+1}=f(n)a_n+q$ 型に変形できることを確認しておく。

漸化式では，

1 ｎ＋１関係の式を左辺に，ｎ関係の式を右辺にまとめ，

▲【2】(1) ｎ＋2，(2) 2ｎ＋3なども含めて…

等差型，等比型，特性方程式型などの漸化式(基本形)へもっていき，

▲上の問題の漸化式は，階差型になる。

2 その一般項を求め，

3 一般項 a_n を求める，

のが基本の流れである。

［答　　案］

0 （定義）

$a_1=1$　…①

$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$　…②

> ◀【注】②より，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+f(\chi)$ の形を作る。
> 左辺の分母がｎ＋１にならないときは，
> （№９（３／４）と（４／４）の問題）
> 分母の平均値で両辺をわる。

1 （ｎ＋１は左辺，ｎは右辺にまとめる）

②の両辺をｎ（ｎ＋１）でわると，　◀漸化式(基本形)にすることをめざす

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+1)}=\frac{(n+1)a_n}{n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)}$$

約分して，

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{1}{n(n+1)}\quad\cdots③$$

◀階差型漸化式になった！

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

2 （数列$\{\frac{a_n}{n}\}$の一般項を求める）

③より，$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{1}{n(n+1)}$であるから，

$b_n=\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}$とおくと，$b_n=\frac{1}{n(n+1)}$　…④

◀階差数列の一般項

④より，数列$\{b_n\}$は，数列$\{\frac{a_n}{n}\}$の階差数列であるから，

$n\geqq 2$のとき，

$$\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$=\frac{1}{1}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

◀部分分数に分けた→No.6（1／8）を参照

$$=1+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right)$$

一気に消える！

◀Σの分配法則

$$=1+\left\{\left(\frac{1}{1}+\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}}\right)-\left(\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}}+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

◀（n－1）項までの和

$$=1+\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

◀（　）内の後項は－であること注意

$$=2-\frac{1}{n}\quad\cdots⑤$$

$n=1$のとき，

⑤に$n=1$を代入すると，

$$\frac{a_1}{1}=2-\frac{1}{1}=1$$

となり，$n=1$のときも成り立つ。

よって，$\frac{a_n}{n}=2-\frac{1}{n}$

3 （一般項a_nを求める）

両辺にnをかけて，

$\underline{a_n=2n-1}$

9

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その６）

（２／４）■　ｎの整式を含む漸化式Ⅲ　■

◇《$a_{n+1}=f(n)a_n+q$　型》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

$a_1=2$,　　$na_{n+1}=(n+1)a_n+3$

で定義される数列｛a_n｝の一般項a_nを求めなさい。

［答　　案］

0　（定義）

$a_1=2$　…①

$na_{n+1}=(n+1)a_n+3$　…②

◀$a_{n+1}=f(\chi)a_n+q$型

1　（n＋1は左辺，nは右辺にまとめる）

◀漸化式(基本形)にすることをめざす

②の両辺を$n(n+1)$でわると，

◀②より，$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+f(\chi)$ の形を作る。

◀階差型漸化式になった！

2　（数列｛$\frac{a_n}{n}$｝の一般項を求める）

◀階差数列の一般項

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

ｎ≧２のとき，

ｎ＝１のとき，

よって，$\dfrac{a_n}{n}=$

$\boxed{3}$ （一般項a_nを求める）

｜メニューへ戻る｜

◇《$a_{n+1}=f(n)a_n+q$　型》**学力化**➡　　／　，

★演習★【１】

$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n+1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $\dfrac{a_n}{n(n+1)}=b_n$ とおくとき，b_{n+1} を b_n と n の式で表しなさい。

(2) a_n を n の式で表しなさい。

＊「置き換え」を使って解く問題です。

［答　　案］

(1) 0 （定義）

$a_1=2$　…①

$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}a_n+1$　…②

◀ $a_{n+1}=f(\chi)\,a_n+q$ 型

1 （n＋1は左辺，nは右辺にまとめる）

◀漸化式(基本形)にすることをめざす

◀②より，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+f(\chi)$ の形を作る。

◀左辺にn＋1でない式がある！

◀分母の平均値で割る。

◀階差型漸化式になった！

★

$\dfrac{a_n}{n(n+1)}=b_n$ とおくと，

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

(2) $\boxed{2}$ （数列$\left\{\dfrac{a_n}{n(n+1)}\right\}$の一般項を求める）

③より，$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{a_n}{n(n+1)}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ であるから，

$c_n=\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}-\dfrac{a_n}{n(n+1)}$ とおくと，$c_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ …④ ◀階差数列の一般項

【注】例題では，階差数列を b_n を使って表していたが，この問題では，(1)で b_n を使っているので c_n を使う。

④より，数列｛c_n｝は，数列｛　　　　　　｝の階差数列であるから，

初項 $\dfrac{a_1}{1(1+1)}$

$n\geqq 2$ のとき，

$n=1$ のとき，

（次のページへつづく）↗

□ □　【３・漸化式と数学的帰納法　No.９（３／４）】　ー〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

よって，$\dfrac{a_n}{n(n+1)} =$

$\boxed{3}$（一般項a_nを求める）

｜メニューへ戻る｜

◇《$a_{n+1}=f(n)a_n+q$　型》**学力化**➡　／　，

★演習★【２】

$a_1=\dfrac{1}{2}$，　$na_{n+1}=(n+2)a_n+1$によって定められる数列$\{a_n\}$がある。

(1)　$a_n=n(n+1)b_n$とおくとき，b_{n+1}をb_nとnの式で表しなさい。

(2)　a_nをnの式で表しなさい。

＊「置き換え」を使って解く問題です。

【考え方】(1)　$a_n=n(n+1)b_n$は，$\dfrac{a_n}{n(n+1)}=b_n$の形で使います。

［答　案］

(1) 0　（定義）

$a_1=\dfrac{1}{2}$　…①

$na_{n+1}=(n+2)a_n+1$　…②

◀ $a_{n+1}=f(\chi)a_n+q$型

1　（n＋1は左辺，nは右辺にまとめる）

◀漸化式(基本形)にすることをめざす

◀②より，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+f(\chi)$ の形を作る。

★

③で，$\dfrac{a_n}{n(n+1)}=b_n$とおくと，$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=b_{n+1}$と表せるから，

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

(2) $\boxed{2}$ （数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n(n+1)}\right\}$ の一般項を求める）

（次のページへつづく）↗

| メニューへ戻る |

□ □　【３・漸化式と数学的帰納法　No.９（４／４）】　ー〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

よって，$\dfrac{a_n}{n(n+1)} =$

$\boxed{3}$　（一般項a_nを求める）