

第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その6)

(1/4) ■ nの整式を含む漸化式II ■

$$a_{n+1} = f(n) a_n \text{ 型}$$

◇ 《 $a_{n+1} = f(n) a_n$ 型》 学力化 → /

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第n項 a_n を求めなさい。

(1) $a_1 = 2, \quad n a_{n+1} = 5(n+1) a_n$

(2) $a_1 = -3, \quad a_{n+1} = \frac{4n}{3(n+1)} a_n$

【考え方】(1) まず、定義式の $n a_{n+1} = 5(n+1) a_n$ は、両辺を n で割ると、
 $a_{n+1} = f(n) a_n$ 型に変形できることを確認しておく。

(2) の定義式は、 $a_{n+1} = f(n) a_n$ 型

漸化式では、

① $n+1$ 関係の式を左辺に、 n 関係の式を右辺にまとめ▲【2】(1) $n+2$, (2) $2n+3$ なども含めて…

等差型, 等比型, 特性方程式型などの漸化式(基本形)へもっていき、

② その一般項を求め、

③ 一般項 a_n を求める、のが基本の流れである。(1) では、次のような操作で、 $n+1$ 関係の式を左辺に、 n 関係の式を右辺にまとめることができる。

$$n a_{n+1} = 5(n+1) a_n$$

両辺を $n(n+1)$ でわると、

$$\frac{n a_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{5(n+1) a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = 5 \cdot \frac{a_n}{n}$$

◀ $a_{n+1} = f(n) a_n$ 型への変形が必要◀ n と $n+1$ を入れかえる工夫(移項みたいなもの)

◀ 約分したら、等比型漸化式になった!

 $n+1$ 関係の式が左辺に、 n 関係の式が右辺にまとまり、等比型漸化式になった。

[答 案]

(1) ① (定義)

$$a_1 = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$n a_{n+1} = 5(n+1) a_n \quad \dots \textcircled{2}$$

① ($n+1$ は左辺, n は右辺にまとめる)②の両辺を $n(n+1)$ でわると、

$$\frac{n a_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{5(n+1) a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = 5 \cdot \frac{a_n}{n} \quad \dots \textcircled{3}$$

◀ 漸化式(基本形)にすることをめざす

◀ 約分したら、等比型漸化式になった!

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【3・漸化式と数学的帰納法 No. 8 (1/4)】 - 〈2枚目/3枚〉

→ (前のページからのつづき)

2 (数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ の一般項を求める)③から, 数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ は,

$$\text{初項 } \frac{a_1}{1} = \frac{2}{1} = 2, \quad \text{公比 } 5$$

の等比数列であるから, 一般項は,

$$\frac{a_n}{n} = 2 \cdot 5^{n-1}$$

◀ 等比数列の一般項の公式より

3 (一般項 a_n を求める)両辺に n をかけて,

$$\underline{a_n = 2n \cdot 5^{n-1}}$$

(2) 0 (定義)

$$a_1 = -3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} = \frac{4n}{3(n+1)} a_n \quad \dots \textcircled{2}$$

1 ($n+1$ は左辺, n は右辺にまとめる)②の両辺に $(n+1)$ をかけると,

$$(n+1) a_{n+1} = \frac{4}{3} n a_n \quad \dots \textcircled{3}$$

◀ 漸化式(基本形)にすることをめざす

◀ 等比型漸化式になった!

2 (数列 $\{n a_n\}$ の一般項を求める)③から, 数列 $\{n a_n\}$ は,

$$\text{初項 } 1 a_1 = 1 \cdot (-3) = -3, \quad \text{公比 } \frac{4}{3}$$

の等比数列であるから, 一般項は,

$$n a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

3 (一般項 a_n を求める)両辺を n でわって,

$$\underline{a_n = -\frac{3}{n} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}$$

(次のページへつづく) →

□ □ 【3・漸化式と数学的帰納法 No. 8 (1 / 4)】 - <3枚目 / 3枚>

➔ (前のページからのつづき)

$a_{n+1} = f(n) a_n$ 型(「置き換え」を使った解き方)

◇ 《 $a_{n+1} = f(n) a_n$ 型(置き換えの利用)》 **学力化** ➔ / .

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第 n 項 a_n を求めなさい。

$$(2) a_1 = -3, \quad a_{n+1} = \frac{4n}{3(n+1)} a_n$$

* (2) の問題を「置き換え」を使って解いてみます。

[答 案]

(2) 0 (定義)

$$a_1 = -3 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} = \frac{4n}{3(n+1)} a_n \quad \dots \textcircled{2}$$

1 ($n+1$ は左辺, n は右辺にまとめる)

②の両辺に $(n+1)$ をかけると,

$$(n+1) a_{n+1} = \frac{4}{3} n a_n \quad \dots \textcircled{3}$$

③で, $n a_n = b_n$ とおくと,

$$b_{n+1} = \frac{4}{3} b_n \quad \dots \textcircled{4}$$

2 (数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める)

④から, 数列 $\{b_n\}$ は,

$$\text{初項 } b_1 = 1 \cdot a_1 = 1 \cdot (-3) = -3, \quad \text{公比 } \frac{4}{3}$$

の等比数列であるから, 一般項は,

$$b_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \quad \leftarrow \text{数列 } \{b_n\} \text{ の一般項}$$

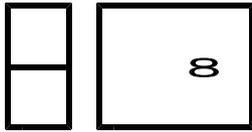
3 (一般項 a_n を求める)

b_n を戻して,

$$n a_n = -3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \quad \leftarrow b_n \text{ を } n a_n \text{ に戻す。}$$

両辺を n でわって,

$$\underline{a_n = -\frac{3}{n} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}} \quad \leftarrow \text{数列 } \{a_n\} \text{ の一般項}$$



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その6)

(2/4) ■ nの整式を含む漸化式Ⅱ ■

◇ 《 $a_{n+1} = f(n)a_n$ 型(置き換えの利用)》 **学力化** → /

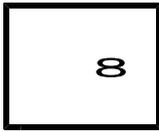
★理解のチェック★

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を [] 内のように置き換えることによつて求めなさい。

$$a_1 = 2, \quad n a_{n+1} = 2(n+1)a_n \quad \left[\frac{a_n}{n} = b_n \right]$$

* 「置き換え」を使つて解く問題です。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その6)

(3/4) ■ nの整式を含む漸化式II ■

◇ 《 $a_{n+1} = f(n)a_n$ 型(置き換えの利用)》 **学力化** → /

★演習★【1】

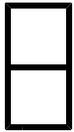
数列 $\{a_n\}$ は条件 $a_1 = 2$, $3na_{n+1} = (n+1)a_n$ を満たしているとする。(1) $b_n = \frac{a_n}{n}$ において数列 $\{b_n\}$ の漸化式を導き、一般項 b_n を求めなさい。(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めなさい。* (3) $\sum_{k=1}^n (a_{k+1} - \frac{1}{3}a_k)$ を求めなさい。

* 「置き換え」を使って解く問題です。

【考え方】(3) (2) の結果を用いて、 $\frac{1}{3}a_k$ と a_{k+1} を k の式で表し、 $a_{k+1} - \frac{1}{3}a_k$ を計算し、これを等比数列の一般項に変形し、それに Σ をかける。

等比数列の和を求めればよい。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その6)

(4/4) ■ nの整式を含む漸化式II ■

◇ 《 $a_{n+1} = f(n)a_n$ 型》**学力化** → /

★演習★【2】

次の漸化式で決定される数列の第n項 a_n を求めなさい。

(1) $a_1 = 4, \quad n a_{n+1} = 2(n+2)a_n$

(2) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2n+3}{2n-1} a_n$

* 「置き換え」を使わないで解きます。

【考え方】(1) このタイプでは「両辺を $n(n+2)$ でわる」が定石であるが、左辺に $n+1$ でない式が残る。そこで、わった後で分母の平均値、すなわち、 $\frac{n+2+n}{2} = n+1$ でもう一度両辺をわると漸化式になる。これ以降は(1/4)と同じ手順で解く。(2) は、最初、両辺を $2n+3$ でわるが、左辺に $n+1$ でない式が残る。(1)と同様に分母の平均値、 $\frac{(2n+3)+(2n-1)}{2} = 2n+1$ で両辺をわると、漸化式になるはずなのだが、漸化式には見えない。見えないなら見えるように分母の式の形を変形する。つまり、 n が $n+1$ になるように組みかえる。複雑ではあるが漸化式になっている。左辺が、右辺の次の項になっている。

[答 案]