8

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その６）

（１／４）■　ｎの整式を含む漸化式Ⅱ　■

$a_{n+1}=f(n)a_n$ 型

◇《$a_{n+1}=f(n)a_n$ 型》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項 a_n を求めなさい。

(1)　$a_1=2$，　　$na_{n+1}=5(n+1)a_n$

(2)　$a_1=-3$，　　$a_{n+1}=\dfrac{4n}{3(n+1)}a_n$

【考え方】(1)　まず，定義式の $na_{n+1}=5(n+1)a_n$ は，両辺をｎで割ると，
$a_{n+1}=f(n)a_n$　型に変形できることを確認しておく。

(2)　の定義式は，$a_{n+1}=f(n)a_n$ 型

漸化式では，

$\boxed{1}$　ｎ＋１関係の式を左辺に，ｎ関係の式を右辺にまとめ，

▲【2】(1)　n＋2，(2)　2n＋3なども含めて…

等差型，等比型，特性方程式型などの漸化式(基本形)へもっていき，

$\boxed{2}$　その一般項を求め，

$\boxed{3}$　一般項 a_n を求める，のが基本の流れである。

(1)　では，次のような操作で，ｎ＋１関係の式を左辺に，ｎ関係の式を右辺にまとめることができる。

$na_{n+1}=5(n+1)a_n$　　◀ $a_{n+1}=f(n)a_n$ 型への変形が必要

両辺を $n(n+1)$ でわると，　　◀ nとn＋1を入れかえる工夫(移項みたいなもの)

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+1)}=\frac{5(n+1)a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=5\cdot\frac{a_n}{n}$$　◀約分したら，等比型漸化式になった！

ｎ＋１関係の式が左辺に，ｎ関係の式が右辺にまとまり，等比型漸化式になった。

［答　　案］

(1)　$\boxed{0}$　（定義）

$a_1=2$　　　　　…①

$na_{n+1}=5(n+1)a_n$　…②

$\boxed{1}$　（n＋1は左辺，nは右辺にまとめる）

②の両辺を $n(n+1)$ でわると，　　◀漸化式(基本形)にすることをめざす

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+1)}=\frac{5(n+1)a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=5\cdot\frac{a_n}{n}\quad\cdots③$$　◀約分したら，等比型漸化式になった！

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

（前のページからのつづき）

2 （数列$\{\frac{a_n}{n}\}$の一般項を求める）

③から，数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ は，

初項 $\frac{a_1}{1}=\frac{2}{1}=2$，　公比 5

の等比数列であるから，一般項は，

$$\frac{a_n}{n}=2\cdot 5^{n-1}$$

◀等比数列の一般項の公式より

3 （一般項a_nを求める）

両辺に n をかけて，

$$a_n=2n\cdot 5^{n-1}$$

(2) 0 （定義）

$$a_1=-3 \quad \cdots①$$

$$a_{n+1}=\frac{4n}{3(n+1)}a_n \quad \cdots②$$

1 （n＋1は左辺，nは右辺にまとめる）

②の両辺に（n＋1）をかけると，

◀漸化式(基本形)にすることをめざす

$$(n+1)a_{n+1}=\frac{4}{3}na_n \quad \cdots③$$

◀等比型漸化式になった！

2 （数列$\{na_n\}$の一般項を求める）

③から，数列 $\{na_n\}$ は，

初項 $1a_1=1\cdot(-3)=-3$，　公比 $\frac{4}{3}$

の等比数列であるから，一般項は，

$$na_n=-3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

3 （一般項a_nを求める）

両辺を n でわって，

$$a_n=-\frac{3}{n}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

（次のページへつづく）

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

$a_{n+1}=f(n)a_n$ 型（「置き換え」を使った解き方）

◇《$a_{n+1}=f(n)a_n$ 型（置き換えの利用）》**学力化**➡　／　，

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項 a_n を求めなさい。

(2)　$a_1=-3$,　　$a_{n+1}=\dfrac{4n}{3(n+1)}a_n$

＊(2) の問題を「置き換え」を使って解いてみます。

［答　　案］

(2) $\boxed{0}$　（定義）

$a_1=-3$　　…①

$a_{n+1}=\dfrac{4n}{3(n+1)}a_n$　…②

$\boxed{1}$　（ｎ＋１は左辺，ｎは右辺にまとめる）

②の両辺に $(n+1)$ をかけると，　◀漸化式(基本形)にすることをめざす

$(n+1)a_{n+1}=\dfrac{4}{3}na_n$　…③　◀等比型漸化式になった！

③で，$na_n=b_n$ とおくと，　◀置き換え

$b_{n+1}=\dfrac{4}{3}b_n$　…④

$\boxed{2}$　（数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める）

④から，数列 $\{b_n\}$ は，

初項　$b_1=1\cdot a_1=1\cdot(-3)=-3$,　　公比 $\dfrac{4}{3}$

の等比数列であるから，一般項は，

$b_n=-3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$　◀数列 $\{b_n\}$ の一般項

$\boxed{3}$　（一般項 a_n を求める）

b_n を戻して，　◀b_n を na_n に戻す。

$na_n=-3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$

両辺をｎでわって，

$a_n=-\dfrac{3}{n}\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$　◀数列 $\{a_n\}$ の一般項

｜メニューへ戻る｜

8

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その６）

（２／４）■　ｎの整式を含む漸化式Ⅱ　■

◇《$a_{n+1}=f(n)a_n$ 型（置き換えの利用）》学力化➡　／　,

★理解のチェック★

次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を［　］内のように置き換えることによって求めなさい。

$a_1=2,\quad na_{n+1}=2(n+1)a_n\quad\left[\ \dfrac{a_n}{n}=b_n\ \right]$

＊「置き換え」を使って解く問題です。

［答　案］

8

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法
1 漸化式（その６）
（３／４）■　ｎの整式を含む漸化式Ⅱ　■

◇《$a_{n+1}=f(n)a_n$ 型（置き換えの利用）》学力化➡　／　，

★演習★【１】

数列｛a_n｝は条件 $a_1=2$，$3na_{n+1}=(n+1)a_n$ を満たしているとする。

(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおいて数列｛b_n｝の漸化式を導き，一般項 b_n を求めなさい。

(2)　数列｛a_n｝の一般項 a_n を求めなさい。

＊(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(a_{k+1}-\frac{1}{3}a_k\right)$ を求めなさい。

＊「置き換え」を使って解く問題です。

【考え方】(3)　(2) の結果を用いて，$\dfrac{1}{3}a_k$ と a_{k+1} を k の式で表し，$a_{k+1}-\dfrac{1}{3}a_k$ を計算し，
これを等比数列の一般項に変形し，それにΣをかける。
等比数列の和を求めればよい。

［答　　案］

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法
１ 漸化式（その６）
（４／４）■　ｎの整式を含む漸化式Ⅱ　■

8

◇《$a_{n+1}=f(n)a_n$ 型》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項 a_n を求めなさい。

(1)　$a_1=4$，　　$na_{n+1}=2(n+2)a_n$

(2)　$a_1=2$，　　$a_{n+1}=\dfrac{2n+3}{2n-1}a_n$

＊「置き換え」を使わないで解きます。

【考え方】(1) このタイプでは「両辺をｎ（ｎ＋２）でわる」が定石であるが，左辺にｎ＋１でない式が残る。そこで，わった後で分母の平均値，すなわち，$\dfrac{n+2+n}{2}=n+1$ でもう一度両辺をわると漸化式になる。これ以降は（１／４）と同じ手順で解く。

(2) は，最初，両辺を２ｎ＋３でわるが，左辺にｎ＋１でない式が残る。(1) と同様に分母の平均値，$\dfrac{(2n+3)+(2n-1)}{2}=2n+1$ で両辺をわると，漸化式になるはずなのだが，漸化式には見えない。見えないなら見えるように分母の式の形を変形する。つまり，ｎがｎ＋１になるように組みかえる。複雑ではあるが漸化式になっている。左辺が，右辺の次の項になっている。

［答　　案］