第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法
１　漸化式（その６）
（１／７）■　ｎの整式を含む漸化式Ⅰ　■

$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型

◇《$a_{n+1}=pa_n+f(n)$型》学力化➡　／　，

★知識の整理★

【１】$a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型の漸化式

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項a_nを求めなさい。
$a_1=5$
$a_{n+1}+2(n+1)+3=5(a_n+2n+3)$

【考え方】$a_{n+1}+2(n+1)+3=5(a_n+2n+3)$
この式は「右辺のｎをｎ＋１に置きかえると左辺の式になる」ということを表している。つまり，a_n+2n+3に５をかけると次の項の式である$a_{n+1}+2(n+1)+3$になるという意味だから，これは等比型の漸化式である。

［答　案］

0　（定義）

$a_1=5$　…①
$a_{n+1}+2(n+1)+3=5(a_n+2n+3)$　…②　◀等比型漸化式

1　（一般項a_nを求める）

②から，数列｛a_n+2n+3｝は，

初項　$a_1+2\cdot1+3=5+2+3=10$，　公比　５
の等比数列であるから，一般項は

$$a_n+2n+3=10\cdot5^{n-1}$$
$$=2\cdot5\cdot5^{n-1}$$ ◀ 10＝2×5だから，因数5を分離する
$$=2\cdot5^n$$ ◀ $5^{1+n-1}=5^n$　（指数法則）

＋２ｎ＋３を移項して，
$a_n=2\cdot5^n-2n-3$

| メニューへ戻る |

◇《$a_{n+1}=pa_n+f(n)$型》**学力化**➡　／　，

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項 a_n を求めなさい。

$a_1=5$

$a_{n+1}=5a_n+8n+10$

【考え方】まず，定義式の $a_{n+1}=\underline{5}\,a_n+\underline{8n+10}$　が，
$a_{n+1}=\underline{p}\,a_n+\underline{f(n)}$　型であることを確認しておく。

$a_{n+1}+2(n+1)+3=5(a_n+2n+3)$ を展開すると，
$a_{n+1}=5a_n+8n+10$　となる。
そこで，$a_{n+1}=5a_n+8n+10$　を
$a_{n+1}+2(n+1)+3=5(a_n+2n+3)$　と変形できれば，
前ページの解き方へもっていける。

$a_{n+1}=\underline{\underline{5}}\,a_n+8n+10$　…①　が
$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=\underline{\underline{5}}(a_n+\alpha n+\beta)$　…②　と変形できたとする。
▲左辺は，右辺の $a_n+\alpha n+\beta$ のnをn＋1に置き換えたものである。
ここで，②を展開すると，
$a_{n+1}+\alpha n+\alpha+\beta=5a_n+5\alpha n+5\beta$
$a_{n+1}=5a_n\underbrace{+4\alpha}_{8}n\underbrace{-\alpha+4\beta}_{10}$　…②’

このとき，①と②’を比較して，
$$\begin{cases}4\alpha=8 & \cdots③\\ -\alpha+4\beta=10 & \cdots④\end{cases}$$

③と④を連立して解くと，
$\alpha=2$，$\beta=3$
これらを②に代入すると，
$a_{n+1}+\underset{\alpha}{2}(n+1)+\underset{\beta}{3}=\underline{\underline{5}}(a_n+\underset{\alpha}{2}n+\underset{\beta}{3})$

前ページの問題の形になった。後は，同じ手順で a_n を求める。

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

［答　　案］

0 （定義）

$a_1=5$ …①

$a_{n+1}=5a_n+8n+10$…② ◀ $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型

ここで，②が，

$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=5(a_n+\alpha n+\beta)$ …③

と変形できたとする。 ◀ $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ 型だから。

1 （α，βを求める）

③を展開して整理すると，

$a_{n+1}+\alpha n+\alpha+\beta=5a_n+5\alpha n+5\beta$

$a_{n+1}=5a_n+4\alpha n-\alpha+4\beta$ …③’

②と③’を比較して，

$$\begin{cases} 4\alpha=8 & \cdots ④ \\ -\alpha+4\beta=10 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

④と⑤を連立して解くと，

④より，$\alpha=2$

これを⑤に代入して，

$-(2)-4\beta=10$より，$\beta=3$

よって，$(\alpha,\ \beta)=(2,\ 3)$

2 （数列$\{a_n+\alpha n+\beta\}$の一般項を求める）

これを③に代入して，

$a_{n+1}+2(n+1)+3=5(a_n+2n+3)$ …⑥ ◀等比型漸化式になった！

⑥から，数列 $\{a_n+2n+3\}$ は， ⬇ 以降はNo.７（１／７）と同じ

初項　$a_1+2\cdot1+3=5+2+3=10$，　公比　5

の等比数列であるから，一般項は

$a_n+2n+3=10\cdot5^{n-1}$

$=2\cdot5\cdot5^{n-1}$ ◀ 10＝2×5だから，因数5を分離する

$=2\cdot5^n$ ◀ $5^{1+n-1}=5^n$ （指数法則）

3 （一般項a_nを求める）

$+2n+3$を移項して，

$a_n=2\cdot5^n-2n-3$

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その６）

（３／７）■　ｎの整式を含む漸化式Ⅰ　■

◇《$a_{n+1}=pa_n+f(n)$型》 学力化➡　／　,

★理解のチェック★

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項a_nを求めなさい。

$a_1=4$,　$a_{n+1}=2a_n+3n-8$

［答　　案］

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その６）

（４／７）■　ｎの整式を含む漸化式Ⅰ　■

◇《$a_{n+1}=pa_n+f(n)$型》学力化➡　　／　，

★演習★【１】

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項a_nを求めなさい。

$a_1=-5$，　$a_{n+1}=5a_n+8n$

【考え方】問題の漸化式の定数部分がないタイプです。ないからといって，置き換える漸化式のβの部分を省略してはいけません。αとβの連立方程式が解けなくなります。

$a_{n+1}=\underline{p}\,a_n+\underline{f(n)}$　型漸化式は，必ず，

$a_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=\underline{5}(a_n+\alpha n+\beta)$

とおいて，α，βを求めて，等比型漸化式を作り，一般項a_nを求めるのが定石です。

［答　　案］

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その６）

（５／７）■　ｎの整式を含む漸化式Ｉ　■

◇《$a_{n+1}=pa_n+f(n)$型》**学力化**➡　／　，

★演習★【２】

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項a_nを求めなさい。

$a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+n^2-n+1$

【考え方】$f(n)$の部分が３項式だから，置き換える漸化式には，α，β，γを使います。
だから，置き換える漸化式の右辺は，$2(a_n+\alpha n^2+\beta n+\gamma)$となります。

［答　　案］

◇《$a_{n+1}=pa_n+f(n)$型》**学力化**➡　　／　，

★演習★【３】

次の初項と漸化式で決まる数列｛a_n｝について，$b_n=a_{n+1}-a_n$とおくとき，b_{n+1}とb_nとの間に成り立つ関係式を求めなさい。また，一般項a_nを求めなさい。

$a_1=1$　…①，　$a_{n+1}=3a_n+2n-1$　…②

【考え方】1　最初に，$b_n=\underline{a_{n+1}-a_n}$とおくときの$b_{n+1}$と$b_n$との間に成り立つ関係式を求める。

（方法）：①$b_n=\underline{a_{n+1}-a_n}$とおくと，$b_{n+1}=\underline{a_{n+2}-a_{n+1}}$と表せるから，それぞれの式の<u>右辺の形</u>を作る必要があるので，②の式のｎにｎ＋１を代入した式から②の式を引く。

②できた差の式において，$b_n=a_{n+1}-a_n$，$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}$とおくと，b_{n+1}とb_nとの間に成り立つ関係式が求まる。

2　次に，与えられた漸化式は$a_{n+1}=pa_n+f(n)$型であるので，この型の解法で一般項a_nを求める。　◀ 7（2／7）と同じ解き方で解ける。

［答　　案］

７

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その６）

（７／７）■　ｎの整式を含む漸化式Ｉ　■

◇《$a_{n+1}=pa_n+f(n)$型》**学力化**➡　／　，

★演習★【４】

次の初項と漸化式で決まる数列｛a_n｝の一般項を求めなさい。

$a_1=5$,　$a_{n+1}=2a_n+3n$

＊No.７（４／７）の★演習★【１】が解けた人は，この問題を解く必要はありません。

【考え方】問題の漸化式の定数部分がないタイプです。ないからといって，置き換える漸化式のβの部分を省略してはいけません。αとβの連立方程式が解けなくなります。つまり，No.７（４／７）の復習問題であることがわかりますね。

［答　　案］