

$$a_{n+1} = p a_n + f(n) \text{ 型}$$

◇ 《 $a_{n+1} = p a_n + f(n)$ 型》 学力化 → / .

★知識の整理★

### 【1】 $a_{n+1} = p a_n + f(n)$ 型の漸化式

次の漸化式で決定される数列の第  $n$  項  $a_n$  を求めなさい。

$$a_1 = 5$$

$$a_{n+1} + 2(n+1) + 3 = 5(a_n + 2n + 3)$$

【考え方】  $a_{n+1} + 2(n+1) + 3 = 5(a_n + 2n + 3)$

この式は「右辺の  $n$  を  $n+1$  に置きかえると左辺の式になる」ということを表している。つまり、 $a_n + 2n + 3$  に 5 をかけると次の項の式である

$a_{n+1} + 2(n+1) + 3$  になるという意味だから、これは等比型の漸化式である。

[答 案]

0 (定義)

$$a_1 = 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} + 2(n+1) + 3 = 5(a_n + 2n + 3) \quad \cdots \textcircled{2}$$

◀ 等比型漸化式

1 (一般項  $a_n$  を求める)

②から、数列  $\{a_n + 2n + 3\}$  は、

$$\text{初項 } a_1 + 2 \cdot 1 + 3 = 5 + 2 + 3 = 10, \quad \text{公比 } 5$$

の等比数列であるから、一般項は

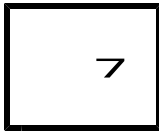
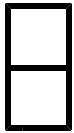
$$\begin{aligned} a_n + 2n + 3 &= 10 \cdot 5^{n-1} \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 5^{n-1} \\ &= 2 \cdot 5^n \end{aligned}$$

◀  $10 = 2 \times 5$  だから、因数 5 を分離する

◀  $5^{1+n-1} = 5^n$  (指数法則)

$+ 2n + 3$  を移項して、

$$\underline{\underline{a_n = 2 \cdot 5^n - 2n - 3}}$$



## 第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

## 1 漸化式 (その6)

## (2/7) ■ nの整式を含む漸化式 I ■

◇ 《 $a_{n+1} = p a_n + f(n)$ 型》 **学力化** → / .

## ★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第n項  $a_n$  を求めなさい。

$$a_1 = 5$$

$$a_{n+1} = 5 a_n + 8 n + 10$$

【考え方】まず、定義式の  $a_{n+1} = \underline{5} a_n + \underline{8 n + 10}$  が、

$$a_{n+1} = \underline{p} a_n + \underline{f(n)} \quad \text{型であることを確認しておく。}$$

 $a_{n+1} + 2(n+1) + 3 = 5(a_n + 2n + 3)$  を展開すると、

$$a_{n+1} = 5 a_n + 8 n + 10 \quad \text{となる。}$$

そこで、 $a_{n+1} = 5 a_n + 8 n + 10$  を

$$a_{n+1} + 2(n+1) + 3 = 5(a_n + 2n + 3) \quad \text{と変形できれば、}$$

前ページの解き方へもっていける。

$$a_{n+1} = \underline{5} a_n + 8 n + 10 \quad \cdots \textcircled{1} \quad \text{が}$$

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = \underline{5}(a_n + \alpha n + \beta) \quad \cdots \textcircled{2} \quad \text{と変形できたとする。}$$

▲左辺は、右辺の  $a_n + \alpha n + \beta$  の  $n$  を  $n+1$  に置き換えたものである。ここで、 $\textcircled{2}$  を展開すると、

$$a_{n+1} + \alpha n + \alpha + \beta = 5 a_n + 5 \alpha n + 5 \beta$$

$$a_{n+1} = 5 a_n + \underbrace{4 \alpha n}_8 - \alpha + \underbrace{4 \beta}_{10} \quad \cdots \textcircled{2}'$$

このとき、 $\textcircled{1}$  と  $\textcircled{2}'$  を比較して、

$$\begin{cases} 4 \alpha = 8 & \cdots \textcircled{3} \\ -\alpha + 4 \beta = 10 & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

 $\textcircled{3}$  と  $\textcircled{4}$  を連立して解くと、

$$\alpha = 2, \quad \beta = 3$$

これらを  $\textcircled{2}$  に代入すると、

$$a_{n+1} + \underbrace{2(n+1)}_{\alpha} + \underbrace{3}_{\beta} = \underline{5}(a_n + \underbrace{2n}_{\alpha} + \underbrace{3}_{\beta})$$

前ページの問題の形になった。後は、同じ手順で  $a_n$  を求める。

(次のページへつづく) →

## □ □ 【3・漸化式と数学的帰納法 No. 7 (2/7)】 - 〈2枚目/2枚〉

→ (前のページからのつづき)

[答 案]

① (定義)

$$a_1 = 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_{n+1} = \underline{5a_n + 8n + 10} \dots \textcircled{2}$$

$$\leftarrow a_{n+1} = p a_n + f(n) \text{ 型}$$

ここで、②が、

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = \underline{5}(a_n + \alpha n + \beta) \dots \textcircled{3}$$

と変形できたとする。

$$\leftarrow a_{n+1} = p a_n + f(n) \text{ 型だから。}$$

② ( $\alpha, \beta$ を求める)

③を展開して整理すると、

$$a_{n+1} + \alpha n + \alpha + \beta = 5a_n + 5\alpha n + 5\beta$$

$$a_{n+1} = \underline{5a_n + 4\alpha n - \alpha + 4\beta} \dots \textcircled{3}'$$

②と③'を比較して、

$$\begin{cases} 4\alpha = 8 & \dots \textcircled{4} \\ -\alpha + 4\beta = 10 & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

④と⑤を連立して解くと、

$$\textcircled{4} \text{より, } \alpha = 2$$

これを⑤に代入して、

$$-(2) - 4\beta = 10 \text{より, } \beta = 3$$

よって、 $(\alpha, \beta) = (2, 3)$ ③ (数列 $\{a_n + \alpha n + \beta\}$ の一般項を求める)

これを③に代入して、

$$a_{n+1} + 2(n+1) + 3 = 5(a_n + 2n + 3) \dots \textcircled{6}$$

◀ 等比型漸化式になった!

⑥から、数列 $\{a_n + 2n + 3\}$ は、

↓ 以降はNo.7(1/7)と同じ

$$\text{初項 } a_1 + 2 \cdot 1 + 3 = 5 + 2 + 3 = 10, \quad \text{公比 } 5$$

の等比数列であるから、一般項は

$$a_n + 2n + 3 = 10 \cdot 5^{n-1}$$

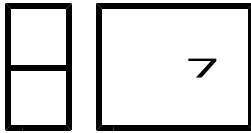
$$= 2 \cdot 5 \cdot 5^{n-1}$$

◀  $10 = 2 \times 5$ だから、因数5を分離する

$$= 2 \cdot 5^n$$

◀  $5^{1+n-1} = 5^n$  (指数法則)③ (一般項 $a_n$ を求める) $+2n + 3$ を移項して、

$$\underline{a_n = 2 \cdot 5^n - 2n - 3}$$



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

**1** 漸化式 (その6)

(3/7) ■  $n$ の整式を含む漸化式 I ■

◇ 《 $a_{n+1} = p a_n + f(n)$ 型》 **学力化** → /

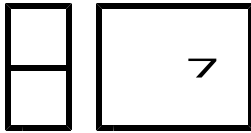
-----  
★理解のチェック★

次の漸化式で決定される数列の第  $n$  項  $a_n$  を求めなさい。

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3n - 8$$

-----

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その6)

(4/7) ■ nの整式を含む漸化式 I ■

◇ 《 $a_{n+1} = p a_n + f(n)$ 型》 **学力化** → / .

★演習★【1】

次の漸化式で決定される数列の第n項  $a_n$  を求めなさい。

$$a_1 = -5, \quad a_{n+1} = 5a_n + 8n$$

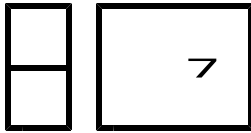
【考え方】問題の漸化式の定数部分がないタイプです。ないからといって、置き換える漸化式の  $\beta$  の部分を省略してはいけません。 $\alpha$  と  $\beta$  の連立方程式が解けなくなります。

$a_{n+1} = p a_n + f(n)$  型漸化式は、必ず、

$$a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 5(a_n + \alpha n + \beta)$$

とにおいて、 $\alpha$ 、 $\beta$  を求めて、等比型漸化式を作り、一般項  $a_n$  を求めるのが定石です。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

**1** 漸化式（その6）

（5 / 7） ■  $n$ の整式を含む漸化式 I ■

◇ 《 $a_{n+1} = p a_n + f(n)$ 型》 **学力化** → / .

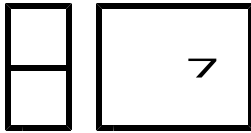
★演習★【2】

次の漸化式で決定される数列の第  $n$  項  $a_n$  を求めなさい。

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n + n^2 - n + 1$$

【考え方】  $f(n)$  の部分が3項式だから、置き換える漸化式には、 $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  を使います。  
だから、置き換える漸化式の右辺は、 $2(a_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma)$  となります。

[答 案]



## 第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

## 1 漸化式(その6)

(6/7) ■  $n$ の整式を含む漸化式 I ■◇ 《 $a_{n+1} = p a_n + f(n)$ 型》**学力化** → / .

## ★演習★【3】

次の初項と漸化式で決まる数列  $\{a_n\}$  について、 $b_n = a_{n+1} - a_n$  とおくと、 $b_{n+1}$  と  $b_n$  との間に成り立つ関係式を求めなさい。また、一般項  $a_n$  を求めなさい。

$$a_1 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

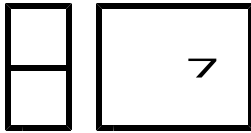
【考え方】**1** 最初に、 $b_n = a_{n+1} - a_n$  とおくときの  $b_{n+1}$  と  $b_n$  との間に成り立つ関係式を求める。

(方法) : **1**  $b_n = a_{n+1} - a_n$  とおくと、 $b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$  と表せるから、それぞれの式の右辺の形を作る必要があるため、**2**の式の  $n$  に  $n+1$  を代入した式から**2**の式を引く。

**2**できた差の式において、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 、 $b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$  とおくと、 $b_{n+1}$  と  $b_n$  との間に成り立つ関係式が求まる。

**2** 次に、与えられた漸化式は  $a_{n+1} = p a_n + f(n)$  型 であるので、この型の解法で一般項  $a_n$  を求める。 ◀ **7** (2/7) と同じ解き方で解ける。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その6)

(7/7) ■ nの整式を含む漸化式 I ■

◇ 《 $a_{n+1} = p a_n + f(n)$ 型》 **学力化** → / .

★演習★【4】

次の初項と漸化式で決まる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めなさい。

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3n$$

\* No. 7 (4/7) の★演習★【1】が解けた人は、この問題を解く必要はありません。

【考え方】問題の漸化式の定数部分がないタイプです。ないからといって、置き換える漸化式の  $\beta$  の部分を省略してはいけません。 $\alpha$  と  $\beta$  の連立方程式が解けなくなります。つまり、No. 7 (4/7) の復習問題であることがわかりますね。

[答 案]