6

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その５）

（１／７）■　分数を含む漸化式　■

分数型 Ⅰ　$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ 型

◇《$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ 型》 学力化➡　／　，

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項 a_n を求めなさい。

$a_1=1$，　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4-6a_n}$

【考え方】$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ タイプの漸化式は，両辺の逆数をとることから始める。

これを整理すると特性方程式型漸化式になるので，それを解けば一般項 a_n が求まる。このとき，$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおいて特性方程式型漸化式を解くと分かりやすい。

（置きかえないと，式は複雑になるが，計算スピードは速く，解法プロセス全体の見通しはよくなる。）

［答　案］

0 （定義を確認する）

$a_1=1$　…①，　　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4-6a_n}$　…②

②で，$a_{n+1}=0$ とすると，$4-6a_n$ は分母であるから０ではないので $a_n=0$ となり，$a_1=1$ に反する。

よって，$a_n\neq0$，$a_{n+1}\neq0$　（だから）

1 （与式を基本タイプの漸化式に変形する）

②で，両辺の逆数をとって，　◀スーパーテクニック

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{4-6a_n}{a_n}$　◀ a_{n+1} や a_n で割ってよい。

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{4}{a_n}-\dfrac{6a_n}{a_n}$

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=4\cdot\dfrac{1}{a_n}-6$　…③　◀特性方程式型漸化式になった！

（次のページへつづく）

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

《以降は，特性方程式型漸化式の一般項を求める問題である》 ◀→No.３（４／９）を参照

2（特性方程式型漸化式を等比型漸化式に変形する）

③は，$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=b_{n+1}$ となるから，

$b_{n+1}=4b_n-6$ …③'　◀ $a_{n+1}=pa_n+q$（特性方程式型）になった！

と表せる。

そこで，③'が，

$b_{n+1}-\alpha=4(b_n-\alpha)$ …④

と変形できたとすると，

③'－④より，

$$\begin{array}{rl} & b_{n+1} \quad\;\; =4b_n-6 \\ -) & b_{n+1}-\alpha=4(b_n-\alpha) \\ \hline & \alpha=-6+4\alpha \\ & \alpha=2 \end{array}$$

よって，④は，$\alpha=2$ のとき，

$b_{n+1}-2=4(b_n-2)$ …⑤　◀等比型漸化式になった！

となる。

《簡便算》

③'において，b_{n+1} と b_n を χ とおいた方程式（特性方程式）を解くと，

$\chi=4\chi-6$ より，$\chi=\underline{2}$

③'の両辺から $\underline{2}$ を引いて，

$b_{n+1}-\underline{2}=4b_n-6-\underline{2}$

$b_{n+1}-2=4(b_n-2)$ …⑤

◀等比型漸化式になった！

3（数列｛b_n-2｝の一般項を求める）

⑤から，数列｛b_n-2｝は，

初項　$b_1-2==\dfrac{1}{a_1}-2=\dfrac{1}{1}-2=-1$，　公比　4

の等比数列であるから，一般項は，

$b_n-2=-1\cdot4^{n-1}$ より，

$b_n-2=-4^{n-1}$

4（一般項 a_n を求める）

b_n を戻して，$\dfrac{1}{a_n}-2=-4^{n-1}$

$\dfrac{1}{a_n}=-4^{n-1}+2$　◀－2を移項

$\underline{a_n=\dfrac{1}{2-4^{n-1}}}$　◀両辺の逆数をとる。

｜メニューへ戻る｜

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その５）

（２／７）■　分数を含む漸化式　■

◇《$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$型》 学力化➡　／　,

★理解のチェック★

$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n+1}$で定義される数列$\{a_n\}$について，次の問いに答えなさい。

(1)　$b_n=\dfrac{1}{a_n}$とおくとき，b_{n+1}とb_nの関係式を求めなさい。

(2)　一般項a_nを求めなさい。

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その５）

（３／７）■　分数を含む漸化式　■

◇《$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{qa_n+r}$ 型》学力化➡　／　，

★演習★【１】

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項a_nを求めなさい。

(1)　$a_1=\dfrac{1}{3}$，　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2-5a_n}$

(2)　$a_1=1$，　$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+3}$

【考え方】(2)　a_nとa_{n-1}の関係式は，イヤな感じ…。もちろん，このままでも解けますが，１つずらして，a_{n+1}とa_nの式になおしておきます。

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

分数型 II　$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+s}{qa_n+r}$ 型

◇《$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+s}{qa_n+r}$ 型》 学力化➡　／　，

★解法の技術★

$a_1=1$，　$a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{a_n+3}$ で定義されている数列 $\{a_n\}$ について，

(1)　$b_n=\dfrac{1}{a_n+1}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めなさい。

(2)　一般項 a_n を求めなさい。

【考え方】(1)　$b_n=\dfrac{1}{a_n+1}$ とおくということは，同時に $b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}+1}$ ということです。これらの条件を $a_n=\sim$，$a_{n+1}=\sim$ に変形し，それらを定義式に代入し，整理すると，b_{n+1} と b_n の関係式ができあがります。

［答　　案］

(1)　**b_{n+1} と b_n の関係式**

0　（定義を確認する）

$a_1=1$　…①，　　　$a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{a_n+3}$　…②

1　（条件式を $a_n=\sim$，$a_{n+1}=\sim$ の形に変形する）

$b_n=\dfrac{1}{a_n+1}$ であるから，$b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}+1}$

それぞれの式を，a_n，a_{n+1} について解くと，

$b_n(a_n+1)=1$　　　$b_{n+1}(a_{n+1}+1)=1$　　◀分母を払う

$a_n+1=\dfrac{1}{b_n}$　　　$a_{n+1}+1=\dfrac{1}{b_{n+1}}$　　◀両辺を b_n，b_{n+1} で割る

$a_n=\dfrac{1}{b_n}-1$　　　$a_{n+1}=\dfrac{1}{b_{n+1}}-1$　…③　　◀1を移項する

▲条件式より，$a_1=1$，$a_n+1\neq 0$ より，$b_n\neq 0$ かつ $b_{n+1}\neq 0$

（次のページへつづく）↗

□ □ 【３・漸化式と数学的帰納法　No.６（４／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

2　（b_{n+1}とb_n の関係式を求める）

③を定義式②に代入して，②をb_{n+1}とb_nの式で表すと，

$$\frac{1}{b_{n+1}}-1=\frac{\frac{1}{b_n}-1-1}{\frac{1}{b_n}-1+3}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}}-1=\frac{1-2b_n}{1+2b_n}$$ ◀右辺の分母と分子にb_nをかける。

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1-2b_n}{1+2b_n}+1$$ ◀１を移項

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1-2b_n+1+2b_n}{1+2b_n}$$ ◀右辺を通分

$$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{2}{2b_n+1}$$

$$\frac{b_{n+1}}{1}=\frac{2b_n+1}{2}$$ ◀両辺の逆数をとる（比の性質を使ってもよい）

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2}\quad\cdots④$$ ◀等差タイプの漸化式になった→No.２（１／３）

(2)　**一般項a_nを求める**

3　（数列{b_n}の一般項を求める）

④から，数列｛b_n｝は，

初項　$b_1=\frac{1}{a_1+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，　　公差　$\frac{1}{2}$

の等差数列であるから，一般項は，

$b_n=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}$　より，$b_n=\frac{n}{2}$

4　（一般項a_nを求める）

b_nを戻して，

$$\frac{1}{a_n+1}=\frac{n}{2}$$

$$\frac{a_n+1}{1}=\frac{2}{n}$$ ◀両辺の逆数をとる。

$$a_n+1=\frac{2}{n}$$

$$a_n=\frac{2}{n}-1$$ ◀１を移項

6

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その５）

（５／７）■　分数を含む漸化式　■

◇《$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+s}{qa_n+r}$ 型》学力化➡　／　,

★理解のチェック★

$a_1=1$，　$a_{n+1}=\dfrac{5a_n+3}{a_n+3}$ で定義されている数列 $\{a_n\}$ について，

(1)　$b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めなさい。

(2)　一般項 a_n を求めなさい。

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

6

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その５）

（６／７）■　分数を含む漸化式　■

◇《$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+s}{qa_n+r}$ 型》**学力化**➡　／　,

★演習★【２】

条件　$a_1=3$，　$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}$　（$n=1$，２，３，…）によって定められる

数列｛a_n｝の一般項 a_n を，$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$ のおき換えを利用して求めなさい。

［答　　案］

6

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その５）

（７／７）■　分数を含む漸化式　■

◇《$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+s}{qa_n+r}$ 型》学力化➡　／　，

★演習★【３】

条件　$a_1=1$，　$a_{n+1}=\dfrac{a_n-9}{a_n-5}$　で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　すべての自然数 n に対して $a_n \neq 3$ であることを示しなさい。

(2)　$b_n=\dfrac{1}{a_n-3}$　とおくとき，b_{n+1} を b_n で表しなさい。また，一般項 a_n を求めなさい。

【考え方】(1)　背理法を使う。
ある自然数 n について，$a_n=3$ と仮定し，条件式に代入して a_{n+1} を求めると，$a_{n+1}=3$ となるから a_1 も 3 となり，$a_1=1$ に矛盾することを導く。

［答　　案］