



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式 (その5)

(1/7) ■ 分数を含む漸化式 ■

分数型 I $a_{n+1} = \frac{p a_n}{q a_n + r}$ 型

◇ 《 $a_{n+1} = \frac{p a_n}{q a_n + r}$ 型》 学力化 → /

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第 n 項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{4 - 6 a_n}$$

【考え方】 $a_{n+1} = \frac{p a_n}{q a_n + r}$ タイプの漸化式は、両辺の逆数をとることから始める。

これを整理すると特性方程式型漸化式になるので、それを解けば一般項 a_n が求まる。このとき、 $\frac{1}{a_n} = b_n$ において特性方程式型漸化式を解くと分かりやすい。

(置きかえないと、式は複雑になるが、計算スピードは速く、解法プロセス全体の見通しはよくなる。)

[答 案]

0 (定義を確認する)

$$a_1 = 1 \quad \dots \textcircled{1}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{4 - 6 a_n} \quad \dots \textcircled{2}$$

②で、 $a_{n+1} = 0$ とすると、 $4 - 6 a_n$ は分母であるから 0 ではないので $a_n = 0$ となり、 $a_1 = 1$ に反する。

よって、 $a_n \neq 0, a_{n+1} \neq 0$ (だから)

1 (与式を基本タイプの漸化式に変形する)

②で、両辺の逆数をとって、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4 - 6 a_n}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4}{a_n} - \frac{6 a_n}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 4 \cdot \frac{1}{a_n} - 6 \quad \dots \textcircled{3}$$

◀スーパーテクニック

◀ a_{n+1} や a_n で割ってよい。

◀特性方程式型漸化式になった!

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【3・漸化式と数学的帰納法 No.6 (1/7)】 - 〈2枚目/2枚〉

→ (前のページからのつづき)

《以降は、特性方程式型漸化式の一般項を求める問題である》

◀→No.3(4/9)を参照

2 (特性方程式型漸化式を等比型漸化式に変形する)

③は、 $\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくと、 $\frac{1}{a_{n+1}} = b_{n+1}$ となるから、

$$b_{n+1} = 4b_n - 6 \quad \dots \textcircled{3}'$$

◀ $a_{n+1} = p a_n + q$ (特性方程式型) になった!

と表せる。

そこで、③'が、

$$b_{n+1} - \alpha = 4(b_n - \alpha) \quad \dots \textcircled{4}$$

と変形できたとすると、

③' - ④より、

$$b_{n+1} = 4b_n - 6$$

$$-) \quad b_{n+1} - \alpha = 4(b_n - \alpha)$$

$$\alpha = -6 + 4\alpha$$

$$\alpha = 2$$

よって、④は、 $\alpha = 2$ のとき、

$$b_{n+1} - 2 = 4(b_n - 2) \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。

◀等比型漸化式になった!

3 (数列 $\{b_n - 2\}$ の一般項を求める)⑤から、数列 $\{b_n - 2\}$ は、

$$\text{初項 } b_1 - 2 = \frac{1}{a_1} - 2 = \frac{1}{1} - 2 = -1, \quad \text{公比 } 4$$

の等比数列であるから、一般項は、

$$b_n - 2 = -1 \cdot 4^{n-1} \quad \text{より、}$$

$$b_n - 2 = -4^{n-1}$$

4 (一般項 a_n を求める)

$$b_n \text{ を戻して、} \quad \frac{1}{a_n} - 2 = -4^{n-1}$$

$$\frac{1}{a_n} = -4^{n-1} + 2$$

◀ -2を移項

$$\underline{\underline{a_n = \frac{1}{2 - 4^{n-1}}}}$$

◀両辺の逆数をとる。

《簡便算》

③'において、 b_{n+1} と b_n を χ とおいた方程式(特性方程式)を解くと、

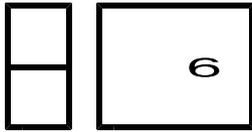
$$\chi = 4\chi - 6 \quad \text{より、} \quad \chi = \underline{2}$$

③'の両辺から $\underline{2}$ を引いて、

$$b_{n+1} - \underline{2} = 4b_n - 6 - \underline{2}$$

$$b_{n+1} - 2 = 4(b_n - 2) \quad \dots \textcircled{5}$$

◀等比型漸化式になった!



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その5）

（2 / 7） ■ 分数を含む漸化式 ■

◇ 《 $a_{n+1} = \frac{p a_n}{q a_n + r}$ 型》 **学力化** → /

-----★理解のチェック★-----

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 a_n + 1}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えなさい。

- (1) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと、 b_{n+1} と b_n の関係式を求めなさい。
- (2) 一般項 a_n を求めなさい。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式 (その5)

(3/7) ■ 分数を含む漸化式 ■

◇ 《 $a_{n+1} = \frac{p a_n}{q a_n + r}$ 型》 **学力化** → /

★演習★【1】

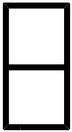
次の漸化式で決定される数列の第 n 項 a_n を求めなさい。

(1) $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2 - 5a_n}$

(2) $a_1 = 1, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1} + 3}$

【考え方】(2) a_n と a_{n-1} の関係式は、イヤな感じ…。もちろん、このままでも解けますが、1つずらして、 a_{n+1} と a_n の式になおしておきます。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その5)

(4/7) ■ 分数を含む漸化式 ■

$$\text{分数型 II} \quad a_{n+1} = \frac{p a_n + s}{q a_n + r} \text{ 型}$$

◇ 《 $a_{n+1} = \frac{p a_n + s}{q a_n + r}$ 型》**学力化** → / ,

★解法の技術★

$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3}$ で定義されている数列 $\{a_n\}$ について,

(1) $b_n = \frac{1}{a_n + 1}$ とおくと、 b_{n+1} と b_n の関係式を求めなさい。

(2) 一般項 a_n を求めなさい。

【考え方】(1) $b_n = \frac{1}{a_n + 1}$ とおくということは、同時に $b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1} + 1}$ というこ

とです。これらの条件を $a_n = \sim, a_{n+1} = \sim$ に変形し、それらを定義式に代入し、整理すると、 b_{n+1} と b_n の関係式ができあがります。

[答 案]

(1) b_{n+1} と b_n の関係式

0 (定義を確認する)

$$a_1 = 1 \quad \dots \textcircled{1}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3} \quad \dots \textcircled{2}$$

1 (条件式を $a_n = \sim, a_{n+1} = \sim$ の形に変形する)

$$b_n = \frac{1}{a_n + 1} \text{ であるから, } b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1} + 1}$$

それぞれの式を、 a_n, a_{n+1} について解くと、

$$b_n(a_n + 1) = 1 \quad b_{n+1}(a_{n+1} + 1) = 1 \quad \leftarrow \text{分母を払う}$$

$$a_n + 1 = \frac{1}{b_n} \quad a_{n+1} + 1 = \frac{1}{b_{n+1}} \quad \leftarrow \text{両辺を } b_n, b_{n+1} \text{ で割る}$$

$$a_n = \frac{1}{b_n} - 1 \quad a_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}} - 1 \quad \dots \textcircled{3} \quad \leftarrow 1 \text{ を移項する}$$

▲条件式より、 $a_1 = 1, a_n + 1 \neq 0$ より、 $b_n \neq 0$ かつ $b_{n+1} \neq 0$

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【3・漸化式と数学的帰納法 No. 6 (4/7)】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

2 (b_{n+1} と b_n の関係式を求める)③を定義式②に代入して、②を b_{n+1} と b_n の式で表すと、

$$\frac{1}{b_{n+1}} - 1 = \frac{\frac{1}{b_n} - 1 - 1}{\frac{1}{b_n} - 1 + 3}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}} - 1 = \frac{1 - 2b_n}{1 + 2b_n}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1 - 2b_n}{1 + 2b_n} + 1$$

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1 - 2b_n + 1 + 2b_n}{1 + 2b_n}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2}{2b_n + 1}$$

$$\frac{b_{n+1}}{1} = \frac{2b_n + 1}{2}$$

$$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{4}$$

◀ 右辺の分母と分子に b_n をかける。

◀ 1 を移項

◀ 右辺を通分

◀ 両辺の逆数をとる(比の性質を使ってもよい)

◀ 等差タイプの漸化式になった→No.2(1/3)

(2) 一般項 a_n を求める3 (数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める)④から、数列 $\{b_n\}$ は、

$$\text{初項 } b_1 = \frac{1}{a_1 + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}, \quad \text{公差 } \frac{1}{2}$$

の等差数列であるから、一般項は、

$$b_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} \quad \text{より, } b_n = \frac{n}{2}$$

4 (一般項 a_n を求める) b_n を戻して、

$$\frac{1}{a_n + 1} = \frac{n}{2}$$

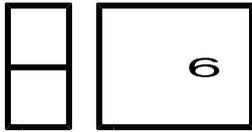
$$\frac{a_n + 1}{1} = \frac{2}{n}$$

$$a_n + 1 = \frac{2}{n}$$

$$a_n = \frac{2}{n} - 1$$

◀ 両辺の逆数をとる。

◀ 1 を移項



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その5)

(5/7) ■ 分数を含む漸化式 ■

◇ 《 $a_{n+1} = \frac{p a_n + s}{q a_n + r}$ 型》学カ化 → /

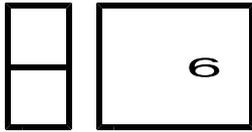
-----★理解のチェック★-----

$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{5 a_n + 3}{a_n + 3}$ で定義されている数列 $\{a_n\}$ について,

(1) $b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$ とおくと、 b_{n+1} と b_n の関係式を求めなさい。

(2) 一般項 a_n を求めなさい。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その5）

（6 / 7） ■ 分数を含む漸化式 ■

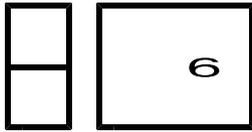
◇ 《 $a_{n+1} = \frac{p a_n + s}{q a_n + r}$ 型》 学力化 → /

★演習★【2】

条件 $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{3 a_n + 2}{a_n + 2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定められる

数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を, $b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 1}$ のおき換えを利用して求めなさい。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その5)

(7/7) ■ 分数を含む漸化式 ■

◇ 《 $a_{n+1} = \frac{p a_n + s}{q a_n + r}$ 型》学カ化 → /

★演習★【3】

条件 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 9}{a_n - 5}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) すべての自然数 n に対して $a_n \neq 3$ であることを示しなさい。

(2) $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ とおくと、 b_{n+1} を b_n で表しなさい。また、一般項 a_n を求めなさい。

【考え方】(1) 背理法を使う。

ある自然数 n について、 $a_n = 3$ と仮定し、条件式に代入して a_{n+1} を求めると、 $a_{n+1} = 3$ となるから a_1 も 3 となり、 $a_1 = 1$ に矛盾することを導く。

[答 案]