

第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その4)

(1/5) ■ n乗を含む漸化式 ■

$$a_{n+1} = p a_n + q \cdot r^n \text{ 型 (n乗型)}$$

◇ 《 $a_{n+1} = p a_n + q \cdot r^n$ 型(n乗型)》 学力化 → /

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第n項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} = 6 a_n + 2 \cdot 3^n$$

【考え方】このタイプの漸化式から数列の一般項を求める方法は、覚えるしかありません。
次の解法の流れを覚えましょう。

$$a_{n+1} = p a_n + q \cdot r^n \quad \dots \textcircled{1}$$

①の両辺を r^{n+1} で割る。

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{p a_n}{r^{n+1}} + \frac{q \cdot r^n}{r^{n+1}}$$

分母の累乗の形を変える。

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{p a_n}{r \cdot r^n} + \frac{q \cdot r^n}{r \cdot r^n}$$

分数の形を変えたり、約分する。

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{p}{r} \cdot \frac{a_n}{r^n} + \frac{q}{r} \quad \dots \textcircled{2}$$

②で $\frac{a_n}{r^n} = b_n$ とおくと

$$b_{n+1} = \frac{p}{r} b_n + \frac{q}{r}$$

◀ 置き換えて $b_{n+1} = b_n$ の形が作れるように…

$$\leftarrow r^{n+1} = r^n \cdot r^1 = r \cdot r^n$$

◀ 置き換えて $b_{n+1} = b_n$ の形が作れるように…◀ $a_{n+1} = p a_n + q$ (特性方程式タイプ) になった!

[答 案]

① (定義)

$$a_1 = 4 \quad \dots \textcircled{1}, \quad a_{n+1} = 6 a_n + 2 \cdot 3^n \quad \dots \textcircled{2}$$

② (与式を基本タイプの漸化式に変形する)

②の両辺を 3^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{6 a_n}{3^{n+1}} + \frac{2 \cdot 3^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{6 a_n}{3 \cdot 3^n} + \frac{2 \cdot 3^n}{3 \cdot 3^n}$$

◀ 約分できる形にする。

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = 2 \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{2}{3} \quad \dots \textcircled{3}$$

◀ 約分する/特性方程式型漸化式になった

(次のページへつづく) →

□ □ 【3・漸化式と数学的帰納法 No.5 (1/5)】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

《以降は、特性方程式漸化式の一般項を求める問題である》

◀→No.3(4/9)を参照

2 (特性方程式型漸化式を等比型漸化式に変形する)

③は、 $\frac{a_n}{3^n} = b_n$ とおくと、

$$b_{n+1} = 2b_n + \frac{2}{3} \quad \dots \textcircled{4}$$

◀特性方程式型漸化式の一般項を求める手順→No.3(4/9)

④が、 $b_{n+1} - \alpha = 2(b_n - \alpha) \quad \dots \textcircled{5}$ と変形できたとすると、

④-⑤より、

$$b_{n+1} - \alpha = 2b_n + \frac{2}{3} - 2\alpha$$

$$\text{---) } b_{n+1} - \alpha = 2(b_n - \alpha)$$

$$\alpha = \frac{2}{3} + 2\alpha$$

◀これが特性方程式

$$\alpha = -\frac{2}{3}$$

⑤は、 $\alpha = -\frac{2}{3}$ のとき、

$$b_{n+1} + \frac{2}{3} = 2\left(b_n + \frac{2}{3}\right) \quad \dots \textcircled{6}$$

◀等比型漸化式になった。

3 (数列 $\{b_n + \frac{2}{3}\}$ の一般項を求める)⑥から、数列 $\{b_n + \frac{2}{3}\}$ は、

$$\text{初項 } b_1 + \frac{2}{3} = \frac{a_1}{3^1} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2, \quad \text{公比 } 2$$

の等比数列であるから、一般項は、

$$b_n + \frac{2}{3} = 2 \cdot 2^{n-1} \quad \text{より、}$$

◀等比数列の一般項の公式

$$b_n + \frac{2}{3} = 2^n$$

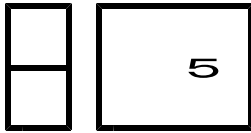
4 (一般項 a_n を求める)

$$b_n \text{ を戻して、} \frac{a_n}{3^n} + \frac{2}{3} = 2^n$$

$$\frac{2}{3} \text{ を移項して、} \frac{a_n}{3^n} = 2^n - \frac{2}{3}$$

両辺に 3^n をかけて、

$$a_n = 3^n \cdot 2^n - 3^n \cdot \frac{2}{3} \quad \text{より、} \quad \underline{a_n = 6^n - 2 \cdot 3^{n-1}}$$



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その4）

（2 / 5） ■ n 乗を含む漸化式 ■

◇ 《 $a_{n+1} = p a_n + q \cdot r^n$ 型》 **学力化** → /

★理解のチェック★

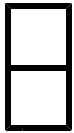
次の漸化式で決定される数列の第 n 項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 8 a_n + 5 \cdot 2^n$$

【考え方】 $a_{n+1} = p a_n + q \cdot r^n$ 型の漸化式です。両辺を r^{n+1} で割ります。

こうすると「特性方程式タイプ」の漸化式に変形できるからです。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その4)

(3/5) ■ n乗を含む漸化式 ■

◇ 《 $a_{n+1} = p a_n + q \cdot r^n$ 型》**学力化** → /

★演習★【1】

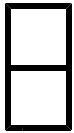
次の漸化式で決定される数列の第n項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = 2 a_n + 3^n$$

【考え方】 $a_{n+1} = p a_n + r^n$ タイプの漸化式は、両辺を r^{n+1} で割り、 $\left\{ \frac{a_n}{r^n} \right\} = \{b_n\}$ と

おくことがポイントです。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その4)

(4/5) ■ n乗を含む漸化式 ■

◇ 《 $a_{n+1} = p a_n + q \cdot r^n$ 型》 **学力化** → /

★演習★【2】

次の漸化式で決定される数列の第n項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 9, \quad a_{n+1} = 3a_n + 9 \cdot 3^n$$

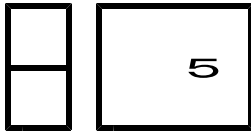
【考え方】 $a_{n+1} = p a_n + q \cdot r^n$ タイプの漸化式は、両辺を r^{n+1} で割り、 $\{\frac{a_n}{r^n}\} = \{b_n\}$

とおくことがポイントです。

ただし、この問題の特殊性は、置き換えると、特殊方程式タイプではなく、等差タイプの漸化式になる、ということです。(→No.1を参照)

この点に注意して解いてみましょう。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その4）

(5 / 5) ■ n乗を含む漸化式 ■

◇ 《 $a_{n+1} = p a_n + q \cdot r^n$ 型》 **学力化** → /

★演習★【3】

次の漸化式で決定される数列の第 n 項 a_n を求めなさい。

- (1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3 a_n + 2^n$
- (2) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3 a_n + 3^{n-1}$

【考え方】(1) では、 $a_{n+1} = 3 a_n + 2^n$ より、両辺を 2^{n+1} で割る！

(2) では、 $a_{n+1} = 3 a_n + 3^{n-1}$ より、両辺を 3^{n+1} で割る！

[答 案]