｜メニューへ戻る｜

5

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その４）

（１／５）■　ｎ乗を含む漸化式　■

$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$ 型（ｎ乗型）

◇《$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$ 型（ｎ乗型）》 学力化➡　　／　，

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項a_nを求めなさい。

$a_1=4$，　$a_{n+1}=6a_n+2\cdot 3^n$

【考え方】このタイプの漸化式から数列の一般項を求める方法は，覚えるしかありません。
次の解法の流れを覚えましょう。

$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$　…①

①の両辺をr^{n+1}で割る。

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}=\frac{pa_n}{r^{n+1}}+\frac{q\cdot r^n}{r^{n+1}}$$

分母の累乗の形を変える。　◀ 置き換えて$b_{n+1}=b_n$の形が作れるように…

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}=\frac{pa_n}{r\cdot r^n}+\frac{q\cdot r^n}{r\cdot r^n}$$

◀ $r^{n+1}=r^n\cdot r^1=r\cdot r^n$

分数の形を変えたり，約分する。　◀ 置き換えて$b_{n+1}=b_n$の形が作れるように…

$$\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}}=\frac{p}{r}\cdot\frac{a_n}{r^n}+\frac{q}{r}\quad\cdots②$$

②で $\dfrac{a_n}{r^n}=b_n$ とおくと

$$b_{n+1}=\frac{p}{r}b_n+\frac{q}{r}$$

◀ $a_{n+1}=pa_n+q$（特性方程式タイプ）になった！

［答　案］

0（定義）

$a_1=4$　…①，　$a_{n+1}=6a_n+2\cdot 3^n$　…②

1（与式を基本タイプの漸化式に変形する）

②の両辺を3^{n+1}で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{6a_n}{3^{n+1}}+\frac{2\cdot 3^n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{6a_n}{3\cdot 3^n}+\frac{2\cdot 3^n}{3\cdot 3^n}$$

◀約分できる形にする。

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=2\cdot\frac{a_n}{3^n}+\frac{2}{3}\quad\cdots③$$

◀約分する／特性方程式型漸化式になった

（次のページへつづく）↗

□□　【３・漸化式と数学的帰納法　No.５　（１／５）】　－〈２枚目／２枚〉

（前のページからのつづき）

《以降は，特性方程式漸化式の一般項を求める問題である》　◀→№.3（4／9）を参照

2　（特性方程式型漸化式を等比型漸化式に変形する）

③は，$\dfrac{a_n}{3^n}=b_n$とおくと，

$$b_{n+1}=2b_n+\frac{2}{3}\quad\cdots④$$

◀特性方程式型漸化式の一般項を求める手順→№.3（4／9）

④が，$b_{n+1}-\alpha=2(b_n-\alpha)\quad\cdots⑤$　と変形できたとすると，

④－⑤より，

$$\begin{array}{rl} b_{n+1} & =2b_n+\dfrac{2}{3} \\ -)\ b_{n+1}-\alpha & =2(b_n-\alpha) \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=\frac{2}{3}+2\alpha$$

◀これが特性方程式

$$\alpha=-\frac{2}{3}$$

⑤は，$\alpha=-\dfrac{2}{3}$のとき，

$$b_{n+1}+\frac{2}{3}=2\left(b_n+\frac{2}{3}\right)\quad\cdots⑥$$

◀等比型漸化式になった。

3　（数列$\{b_n+\frac{2}{3}\}$の一般項を求める）

⑥から，数列$\{b_n+\dfrac{2}{3}\}$は，

初項　$b_1+\dfrac{2}{3}==\dfrac{a_1}{3^1}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{3}=2$，　公比　2

の等比数列であるから，一般項は，

$$b_n+\frac{2}{3}=2\cdot 2^{n-1}\quad \text{より，}$$

◀等比数列の一般項の公式

$$b_n+\frac{2}{3}=2^n$$

4　（一般項a_nを求める）

b_nを戻して，$\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{2}{3}=2^n$

$\dfrac{2}{3}$を移項して，$\dfrac{a_n}{3^n}=2^n-\dfrac{2}{3}$

両辺に3^nをかけて，

$\underline{a_n}=3^n\cdot 2^n-3^n\cdot\dfrac{2}{3}$より，　$\underline{a_n=6^n-2\cdot 3^{n-1}}$

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

5

1 漸化式（その４）

（２／５）■　ｎ乗を含む漸化式　■

◇《$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$ 型》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項a_nを求めなさい。

$a_1=5$，$a_{n+1}=8a_n+5\cdot 2^n$

【考え方】$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$ 型の漸化式です。両辺をr^{n+1}で割ります。
こうすると「特性方程式タイプ」の漸化式に変形できるからです。

［答　　案］

5

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その４）

（３／５）■　ｎ乗を含む漸化式　■

◇《$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$ 型》学力化➡　　／　，

★演習★【１】

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項a_nを求めなさい。

$a_1=5$，$a_{n+1}=2a_n+3^n$

【考え方】$a_{n+1}=pa_n+r^n$ タイプの漸化式は，両辺をr^{n+1}で割り，$\left\{\dfrac{a_n}{r^n}\right\}=\{b_n\}$とおくことがポイントです。

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その４）

（４／５）■　ｎ乗を含む漸化式　■

◇《$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$ 型》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項a_nを求めなさい。

$a_1=9$，$a_{n+1}=3a_n+9\cdot 3^n$

【考え方】$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$ タイプの漸化式は，両辺をr^{n+1}で割り，$\{\frac{a_n}{r^n}\}=\{b_n\}$

とおくことがポイントです。

　ただし，この問題の特殊性は，置き換えると，特殊方程式タイプではなく，

等差タイプの漸化式になる，ということです。（→No.１を参照）

　この点に注意して解いてみましょう。

［答　　案］

5

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その４）

（５／５）■　ｎ乗を含む漸化式　■

◇《$a_{n+1}=pa_n+q\cdot r^n$ 型》学力化➡　　／　，

★演習★【３】

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項 a_n を求めなさい。

(1)　$a_1=1$，　$a_{n+1}=3a_n+2^n$

(2)　$a_1=2$，　$a_{n+1}=3a_n+3^{n-1}$

【考え方】(1)　では，　$a_{n+1}=3a_n+2^n$ より，両辺を 2^{n+1} で割る！

(2)　では，　$a_{n+1}=3a_n+3^{n-1}$ より，両辺を 3^{n+1} で割る！

［答　　案］