

## 第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

## 1 漸化式(その3)

【No. 4の後で学習☆発展問題】(1/7)

## 漸化式が偶奇分けされた数列

— ●★解法の技術★の学習のしかた● —

- (1) 下の答案を学習し、解法プロセスを覚えましょう。／覚えたら、……  
 (2) 模範解答を見ないで、次のページの★理解のチェック★の問題を解いてみましょう。  
 (模範解答を見ながら答案を書いても力はずきません。一度、「解法プロセス」を頭の中に入れることが大切です。)

◇《漸化式が偶奇分けされた数列》**学力化**→ /

★解法の技術★

数列  $\{a_n\}$  は、次の規則により、定められている ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )。

$$a_1 = 1, \begin{cases} n \text{ が偶数なら, } a_{n+1} = 2a_n \\ n \text{ が奇数なら, } a_{n+1} = a_n + 2 \quad \dots \end{cases}$$

- (1)  $a_2$  と  $a_3$  の値を求めよ。  
 (2) 一般項  $a_n$  を求めよ。

(足利工大)

【考え方】偶数項目、奇数項目によって、漸化式の定義が違うときは、奇数項目どうし  
 (または、偶数項目どうし)のつながりを調べる。

[答案] / ★★★★★ /

1 (項の値)

$$\begin{aligned} (1) \quad a_2 &= a_{1+1} = a_1 + 2 & a_3 &= a_{2+1} = 2 \times a_2 \\ &= 1 + 2 & &= 2 \times 3 \\ &= \underline{3} & &= \underline{6} \end{aligned}$$

(2) 数列  $\{b_n\}$  を

$b_n = a_{2n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) …① ◀  $\{b_n\}$  は  $\{a_n\}$  の偶数番目の数列  
 と定めると、自然数  $n$  に対して、

2 (数列  $\{b_n\}$  の漸化式を求める)①の  $n$  に  $n+1$  を代入して、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{2(n+1)} \\ &= a_{2n+2} \\ &= a_{(2n+1)+1} \\ &= a_{2n+1} + 2 \\ &= 2a_{2n} + 2 \\ &= 2b_n + 2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

◀この形では条件は使えない。

◀分配法則

◀添字を「(奇数)+1」の形にする。

◀「公差2の等差数列」に変換／添字が「偶数+1」

◀「公比2の等比数列」に変換

◀ $a_{2n}$  を  $b_n$  に戻す／**特性方程式型漸化式**になった。

(次のページへつづく) →

## □ □ 【3・漸化式と数学的帰納法 No. 4 s (1/7)】 - 〈2枚目/2枚〉

→ (前のページからのつづき)

## ③ (特性方程式型漸化式→等比型漸化式)

$$b_{n+1} = 2b_n + 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

◀ 特性方程式型漸化式

$$\textcircled{2} \text{が, } b_{n+1} - \alpha = 2(b_n - \alpha) \quad \dots \textcircled{3}$$

と変形できたとする。

②において,

 $b_{n+1}$  と  $b_n$  を  $\alpha$  とおいた方程式(特性方程式)を解くと,

$$\alpha = 2\alpha + 2$$

$$\alpha = -2$$

③で  $\alpha = -2$  のとき,

$$b_{n+1} + 2 = 2(b_n + 2) \quad \dots \textcircled{4}$$

◀ 等比型漸化式

④ (数列  $\{a_n\}$  の一般項を求める)④より, 数列  $\{b_n + 2\}$  は,

$$\text{初項 } b_1 + 2 = a_{2 \cdot 1} + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$\text{公比 } 2$$

の等比数列であるから, 一般項は,

$$b_n + 2 = 5 \cdot 2^{n-1}$$

+2を移項して,

$$a_{2n} = b_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 2 \quad \dots \textcircled{5}$$

また, 条件 ( $n$ が奇数なら,  $a_{n+1} = a_n + 2$ ) より,

$$a_{(2n-1)+1} = a_{(2n-1)} + 2$$

$$a_{2n} = a_{2n-1} + 2$$

$$a_{2n-1} = a_{2n} - 2$$

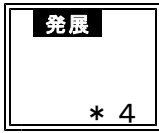
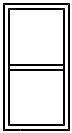
$$= 5 \cdot 2^{n-1} - 2 - 2$$

$$= 5 \cdot 2^{n-1} - 4 \quad \dots \textcircled{6}$$

## ⑤ (答をまとめる)

⑤と⑥より, 求める  $a_n$  の一般項は,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{2n} = b_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 2 \\ a_{2n-1} = 5 \cdot 2^{n-1} - 4 \end{array} \right.$$



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その3)

【No. 4の後で学習☆発展問題】(2/7)

◇《漸化式が偶奇分けされた数列》**学力化**→ /

-----★理解のチェック★-----

数列  $\{a_n\}$  は、次の規則により、定められている ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )。

$$a_1 = 1, \begin{cases} n \text{ が偶数なら, } a_{n+1} = 2a_n \\ n \text{ が奇数なら, } a_{n+1} = a_n + 2 \dots \end{cases}$$

(1)  $a_2$  と  $a_3$  の値を求めよ。

(2) 一般項  $a_n$  を求めよ。

(足利工大)

-----

\* 前ページの例題と同じ問題です。模範解答を見ないで解いてみましょう。

解けないときは、解法プロセスを覚え直し、模範解答を見ないでもう一度解いてみましょう。

★

[答 案] / ★★★★★ /

**1** (項の値)

(1)  $a_2 =$

$a_3 =$

(2) 数列  $\{b_n\}$  を

$$b_n = a_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \dots \textcircled{1} \quad \blacktriangleleft \{b_n\} \text{ は } \{a_n\} \text{ の偶数番目の数列}$$

と定めると、自然数  $n$  に対して、

**2** (数列  $\{b_n\}$  の漸化式を求める)

①の  $n$  に  $n+1$  を代入して、

$$b_{n+1} = a_{2(n+1)}$$

=

◀この形では条件は使えない。

◀分配法則

◀添字を「(奇数)+1」の形にする。

◀「公差2の等差数列」に変換/添字が「偶数+1」

◀「公比2の等比数列」に変換

◀ $a_{2n}$  を  $b_n$  に戻す/特性方程式型漸化式になった。

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【 3 ・ 漸化式と数学的帰納法 No. 4 s ( 2 / 7 ) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚 〉

↗ ( 前のページからのつづき )

③ ( 特性方程式型漸化式 → 等比型漸化式 )

$$b_{n+1} = \text{-----} \cdots \text{②}$$

◀ [特性方程式型漸化式](#)

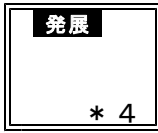
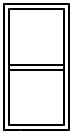
④ ( 数列 { a<sub>n</sub> } の一般項を求める )

④より, 数列 {                      } は,

また, 条件 ( n が奇数なら, a<sub>n+1</sub> = a<sub>n</sub> + 2 ) より,

⑤ ( 答をまとめる )

求める a<sub>n</sub> の一般項は,



## 第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

## 1 漸化式 (その3)

【No. 4 の後で学習☆発展問題】 (3 / 7)

## 漸化式が偶奇分けされた数列の和

◇ 《漸化式が偶奇分けされた数列の和》 **学力化** →

★解法の技術★

 $a_1=2, a_2=3, a_{n+2}-a_n=4$  で定義される数列  $\{a_n\}$  について,
(1)  $a_3, a_4, a_5, a_6$  を求めよ。(2)  $a_{40}$  を求めよ。また,  $\sum_{k=1}^{40} a_k$  を求めよ。【考え方】  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ 奇数番目の項 ( $a_1, a_3, a_5, \dots$ ) と偶数番目の項 ( $a_2, a_4, a_6, \dots$ )

とに分けて考える。

 $\sum_{k=1}^{40} a_k$  については,

$$(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{39}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{40})$$

と分けて計算すればよい。

[答 案] / ★★☆☆ /

① (項の値)

(1)  $a_{n+2}-a_n=4$  より,  $a_{n+2}=a_n+4 \dots \textcircled{1}$ 

$$a_3 = a_1 + 4 = 2 + 4 = 6 \quad \blacktriangleleft n=1$$

$$a_4 = a_2 + 4 = 3 + 4 = 7 \quad \blacktriangleleft n=2$$

$$a_5 = a_3 + 4 = 6 + 4 = 10 \quad \blacktriangleleft n=3$$

$$a_6 = a_4 + 4 = 7 + 4 = 11 \quad \blacktriangleleft n=4$$

(2) ①より,

・数列  $\{a_n\}$  の偶数番目の項は,

初項  $a_2=3$

公差 4

の等差数列だから,

$$a_{2n} = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$$

よって,  $a_{40} = 4 \cdot 20 - 1 = \underline{79}$

$$\blacktriangleleft a_2=3, a_4=7, a_6=11$$

(次のページへつづく) ↗

## □ □ 【3・漸化式と数学的帰納法 No. 4 s (3/7)】 - 〈2枚目/2枚〉

↗ (前のページからのつづき)

・同様に, 数列  $\{a_n\}$  の奇数番目の項は,  
 公差 4  
 の等差数列だから,

$$a_{2n-1} = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$$

初項  $a_1 = 2$ 

$$\blacktriangleleft a_1 = 2, a_3 = 6, a_5 = 10$$

よって,

$$\sum_{k=1}^{40} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{39} + a_{40}$$

$$= (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{39}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{40})$$

$$= \sum_{k=1}^{20} (4k-2) + \sum_{k=1}^{20} (4k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^{20} (8k-3)$$

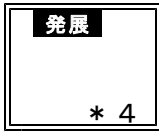
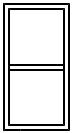
$$\blacktriangleleft \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)$$

$$= 8 \sum_{k=1}^{20} k - 3 \sum_{k=1}^{20} 1$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 - 3 \cdot 20$$

$$\blacktriangleleft \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$= \underline{\underline{1620}}$$



## 第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

## 1 漸化式(その3)

【No. 4の後で学習☆発展問題】(4/7)

◇《漸化式が偶奇分けされた数列の和》**学力化** → / ,

-----★理解のチェック★-----

 $a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 3, a_{n+3} - a_n = 5$  で定義される数列  $\{a_n\}$  について,(1)  $a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$  を求めよ。(2)  $a_{30}$  を求めよ。また,  $\sum_{k=1}^{30} a_k$  を求めよ。-----  
[答 案] / ★★☆☆ /(1)  $a_{n+3} - a_n = 5$  より,  $a_{n+3} = a_n + 5 \dots \textcircled{1}$ 

$$a_4 = \quad \leftarrow n = 1$$

$$a_5 = \quad \leftarrow n = 2$$

$$a_6 = \quad \leftarrow n = 3$$

$$a_7 = \quad \leftarrow n = 4$$

$$a_8 = \quad \leftarrow n = 5$$

$$a_9 = \quad \leftarrow n = 6$$

(2) ①より,  $k$  を自然数とすると,・数列  $\{a_n\}$  の  $3k$  番目の項は,

初項

公差

の等差数列の  $k$  番目の項だから,よって,  $a_{30} =$ ・同様に, 数列  $\{a_n\}$  の  $3k - 2$  番目の項は,

初項

公差

の等差数列の  $k$  番目の項だから,

$$a_{3k-2} =$$

(次のページへつづく) →

□ □ 【 3・漸化式と数学的帰納法 No. 4 s (4 / 7) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚 〉

➡ (前のページからのつづき)

・最後に、数列  $\{a_n\}$  の  $3k - 1$  番目の項は、

初項

公差

の等差数列の  $k$  番目の項だから、

$$a_{3k-1} = 5k - 4$$

よって、

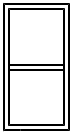
$$\sum_{k=1}^{30} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{28} + a_{29} + a_{30}$$

$$= (a_1 + a_4 + \cdots + a_{28}) + (a_2 + a_5 + \cdots + a_{29}) + (a_3 + a_6 + \cdots + a_{30})$$

$$= \sum_{k=1}^{10} ( \quad ) + \sum_{k=1}^{10} ( \quad ) + \sum_{k=1}^{10} ( \quad )$$

=





発展

## 第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

## 1 漸化式(その3)

\* 4

【No. 4の後で学習☆発展問題】(5/7)

◇《漸化式が偶奇分けされた数列の和》**学力化**→ /

## ★演習★【1】

次の問いに答えよ。

(1) 数列  $\{a_n\}$  が次のように定められている。

$$a_1=0, \quad a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (n \text{ が奇数のとき}) \\ a_n+1 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

 $n$  が奇数の場合と偶数の場合のそれぞれについて、 $a_{n+4}$  を  $a_n$  で表せ。

$$(2) a_1 \text{ を自然数とし, } a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ a_n+1 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定まる自然数からなる数列  $\{a_n\}$  を考える。 $a_1=5$  のとき、 $a_4, a_7, a_{10}$  を求めよ。

$$(3) a_1 \text{ を自然数とし, } a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ a_n+1 & (a_n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定まる自然数からなる数列  $\{a_n\}$  を考える。 $a_1=5$  のとき、 $a_4, a_7, a_{10}$  を求めよ。

【考え方】(1)  $a_{(\text{奇数})+1}=2a_{(\text{奇数})}$ ,  $a_{(\text{偶数})+1}=a_{(\text{偶数})}+1$  を利用して、項の番号を1つずつ小さくしていく。

(3)  $n$  ではなく、 $a_n$  が偶数か奇数かで場合分けをすることに注意!

\* 上の問題のように、「与えられた規則を使って数列を作っていく技術」は、入試レベルの問題を解くときの必須のツールである。

[答 案]

★書けないときは、次のページへ続けなさい。★