発展

＊４

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その３）

【No.４の後で学習☆発展問題】（１／７）

漸化式が偶奇分けされた数列

●★解法の技術★の学習のしかた●

(1) 下の答案を学習し，解法プロセスを覚えましょう。／覚えたら，.....

(2) 模範解答を見ないで，次のページの★理解のチェック★の問題を解いてみましょう。

（模範解答を見ながら答案を書いても力はつきません。一度，「解法プロセス」を頭の中に入れることが大切です。）

◇《漸化式が偶奇分けされた数列》 学力化➡　　／　，

★解法の技術★

数列 $\{a_n\}$ は，次の規則により，定められている（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）。

$$a_1=1,\ \begin{cases} n\text{が偶数なら，} & a_{n+1}=2a_n \\ n\text{が奇数なら，} & a_{n+1}=a_n+2 \end{cases}\ \cdots$$

(1) a_2とa_3 の値を求めよ。

(2) 一般項a_nを求めよ。　　（足利工大）

【考え方】偶数項目，奇数項目によって，漸化式の定義が違うときは，奇数項目どうし（または，偶数項目どうし）のつながりを調べる。

［答　案］／ ★★★☆ ／

1 （項の値）

(1) $a_2=a_{1+1}=a_1+2$
$=1+2$
$=\underline{3}$

$a_3=a_{2+1}=2\times a_2$
$=2\times 3$
$=\underline{6}$

(2) 数列 $\{b_n\}$ を

$b_n=a_{2n}$　（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）　…①　◀ $\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の偶数番目の数列

と定めると，自然数nに対して，

2 （数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求める）

①のnにn＋１を代入して，

$b_{n+1}=a_{2(n+1)}$　◀この形では条件は使えない。

$=a_{2n+2}$　◀分配法則

$=a_{(2n+1)+1}$　◀添字を「（奇数）＋１」の形にする。

$=a_{2n+1}+2$　◀「公差２の等差数列」に変換／添字が「偶数＋１」

$=2a_{2n}+2$　◀「公比２の等比数列」に変換

$=2b_n+2$　…②　◀ a_{2n} をb_n に戻す／特性方程式型漸化式になった。

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

（前のページからのつづき）

3 （特性方程式型漸化式→等比型漸化式）

$b_{n+1}=2b_n+2$ …②　◀特性方程式型漸化式

②が，$b_{n+1}-\alpha=2(b_n-\alpha)$ …③

と変形できたとする。

②において，

b_{n+1} と b_n を α とおいた方程式（特性方程式）を解くと，

$\alpha=2\alpha+2$

$\alpha=-2$

③で $\alpha=-2$ のとき，

$b_{n+1}+2=2(b_n+2)$ …④　◀等比型漸化式

4 （数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める）

④より，数列 $\{b_n+2\}$ は，

初項　$b_1+2=a_{2\cdot1}+2=3+2=5$

公比　2

の等比数列であるから，一般項は，

$b_n+2=5\cdot2^{n-1}$

＋２を移項して，

$a_{2n}=b_n=5\cdot2^{n-1}-2$ …⑤

また，条件（ｎが奇数なら，$a_{n+1}=a_n+2$）より，

$a_{(2n-1)+1}=a_{(2n-1)}+2$

$a_{2n}=a_{2n-1}+2$

$a_{2n-1}=a_{2n}-2$

$=5\cdot2^{n-1}-2-2$

$=5\cdot2^{n-1}-4$ …⑥

5 （答をまとめる）

⑤と⑥より，求める a_n の一般項は，

$$\begin{cases} a_{2n}=b_n=5\cdot2^{n-1}-2 \\ a_{2n-1}=5\cdot2^{n-1}-4 \end{cases}$$

発展 ＊４

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その３）

【No.４の後で学習☆発展問題】（２／７）

◇《漸化式が偶奇分けされた数列》 学力化➡　／　，

★理解のチェック★

数列 $\{a_n\}$ は，次の規則により，定められている（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）。

$$a_1=1,\ \begin{cases} n\text{が偶数なら，} & a_{n+1}=2a_n \\ n\text{が奇数なら，} & a_{n+1}=a_n+2 \end{cases}\quad\cdots$$

(1)　a_2とa_3　の値を求めよ。

(2)　一般項 a_nを求めよ。　　（足利工大）

＊前ページの例題と同じ問題です。模範解答を見ないで解いてみましょう。
解けないときは，解法プロセスを覚え直し，模範解答を見ないでもう一度解いてみましょう。

★

［答　案］／ ★★★☆ ／

1　（項の値）

(1)　$a_2=$　　　　$a_3=$

(2)　数列 $\{b_n\}$ を

$b_n=a_{2n}$　（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）　…①　　◀ $\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ の偶数番目の数列

と定めると，自然数 n に対して，

2　（数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求める）

①の n に n＋１を代入して，

$b_{n+1}=a_{2(n+1)}$　　◀この形では条件は使えない。

＝　　◀分配法則

◀添字を「（奇数）＋１」の形にする。

◀「公差２の等差数列」に変換／添字が「偶数＋１」

◀「公比２の等比数列」に変換

◀ a_{2n} を b_n に戻す／特性方程式型漸化式になった。

（次のページへつづく）↗

□ □ 【３・漸化式と数学的帰納法　No.４ｓ（２／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

3 （特性方程式型漸化式→等比型漸化式）

$b_{n+1}=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ …②　　◀特性方程式型漸化式

4 （数列｛ａ ｎ｝の一般項を求める）

④より，数列｛　　　　　　｝は，

また，条件（ｎが奇数なら，$a_{n+1}=a_n+2$）より，

5 （答をまとめる）

求める a_n の一般項は，

発展 ＊４

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その３）

【No.４の後で学習☆発展問題】（３／７）

漸化式が偶奇分けされた数列の和

◇《漸化式が偶奇分けされた数列の和》学力化➡　　／　　，

★解法の技術★

$a_1=2$，$a_2=3$，$a_{n+2}-a_n=4$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，

(1)　a_3，a_4，a_5，a_6 を求めよ。

(2)　a_{40}を求めよ。また，$\sum_{k=1}^{40} a_k$ を求めよ。

【考え方】a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, …

奇数番目の項（a_1, a_3, a_5, …）と

偶数番目の項（a_2, a_4, a_6, …）

とに分けて考える。

$\sum_{k=1}^{40} a_k$ については，

$$(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{39})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{40})$$

と分けて計算すればよい。

［答　　案］／ ★★☆☆ ／

1　（項の値）

(1)　$a_{n+2}-a_n=4$ より，$a_{n+2}=a_n+4$　…①

$a_3=a_1+4=2+4=6$　◀ $n=1$

$a_4=a_2+4=3+4=7$　◀ $n=2$

$a_5=a_3+4=6+4=10$　◀ $n=3$

$a_6=a_4+4=7+4=11$　◀ $n=1$

(2)　①より，

・数列 $\{a_n\}$ の偶数番目の項は，

初項　$a_2=3$

公差　4　◀ $a_2=3$，$a_4=7$，$a_6=11$

の等差数列だから，

$$a_{2n}=3+(n-1)\cdot 4=4n-1$$

よって，$a_{40}=4\cdot 20-1=\underline{79}$

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

・同様に，数列｛ａｎ｝の奇数番目の項は，　初項　$a_1=2$

公差　４

の等差数列だから，

◀$a_1=2$，$a_3=6$，$a_5=10$

$$a_{2n-1}=2+(n-1)\cdot 4=4n-2$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{40} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{39}+a_{40}$$

$$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{39})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{40})$$

$$=\sum_{k=1}^{20}(4k-2)+\sum_{k=1}^{20}(4k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{20}(8k-3)$$

◀$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$

$$=8\sum_{k=1}^{20}k-3\sum_{k=1}^{20}1$$

$$=8\cdot\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 21-3\cdot 20$$

◀$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\underline{1620}$$

｜メニューへ戻る｜

発展

＊４

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その３）

【No.４の後で学習☆発展問題】（４／７）

◇《漸化式が偶奇分けされた数列の和》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

$a_1=-1$，$a_2=1$，$a_3=3$，$a_{n+3}-a_n=5$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，

(1) a_4，a_5，a_6，a_7，a_8，a_9を求めよ。

(2) a_{30}を求めよ。また，$\sum_{k=1}^{30} a_k$ を求めよ。

［答　　案］／ ★★☆☆ ／

(1) $a_{n+3}-a_n=5$ より，$a_{n+3}=a_n+5$　…①

$a_4=$　　◀ $n=1$

$a_5=$　　◀ $n=2$

$a_6=$　　◀ $n=3$

$a_7=$　　◀ $n=4$

$a_8=$　　◀ $n=5$

$a_9=$　　◀ $n=6$

(2) ①より，kを自然数とすると，

・数列 $\{a_n\}$ の３ｋ番目の項は，

初項

公差

の等差数列のｋ番目の項だから，

よって，$a_{30}=$

・同様に，数列 $\{a_n\}$ の３ｋ－２番目の項は，

初項

公差

の等差数列のｋ番目の項だから，

$a_{3k-2}=$

（次のページへつづく）↗

□ □ 【３・漸化式と数学的帰納法　No.４ｓ（４／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

・最後に，数列｛a_n｝の３ｋ－１番目の項は，

初項

公差

の等差数列のｋ番目の項だから，

$a_{3k-1}=\quad=5k-4$

よって，

$$\sum_{k=1}^{30}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{28}+a_{29}+a_{30}$$

$$=(a_1+a_4+\cdots+a_{28})+(a_2+a_5+\cdots+a_{29})+(a_3+a_6+\cdots+a_{30})$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(\qquad\qquad)+\sum_{k=1}^{10}(\qquad\qquad)+\sum_{k=1}^{10}(\qquad\qquad)$$

$$=$$

発展

＊４

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その３）

【No.４の後で学習☆発展問題】（５／７）

◇《漸化式が偶奇分けされた数列の和》学力化➡　　／　，

★演習★【１】

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が次のように定められている。

$$a_1=0,\qquad a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (n\text{が奇数のとき})\\ a_n+1 & (n\text{が偶数のとき})\end{cases}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

n が奇数の場合と偶数の場合のそれぞれについて，a_{n+4} を a_n で表せ。

(2) a_1 を自然数とし，$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (n\text{が偶数のとき})\\ a_n+1 & (n\text{が奇数のとき})\end{cases}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定まる自然数からなる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$a_1=5$ のとき，a_4，a_7，a_{10} を求めよ。

(3) a_1 を自然数とし，$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{が偶数のとき})\\ a_n+1 & (a_n\text{が奇数のとき})\end{cases}\qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定まる自然数からなる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$a_1=5$ のとき，a_4，a_7，a_{10} を求めよ。

【考え方】(1) $a_{(\text{奇数})+1}=2a_{(\text{奇数})}$，$a_{(\text{偶数})+1}=a_{(\text{偶数})}+1$ を利用して，項の番号を１つずつ小さくしていく。

(3) n ではなく，a_n が偶数か奇数かで場合分けをすることに注意！

＊上の問題のように，「与えられた規則を使って数列を作っていく技術」は，入試レベルの問題を解くときの必須のツールである。

［答　　案］

★書けないときは，次のページへ続けなさい。★