4

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その３）

（１／７）■　階差タイプ　■

階差数列（復習）

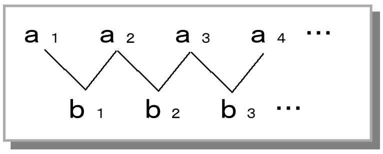
★知識の整理★

【１】階差数列とは？

数列$\{a_n\}$に対して，

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与えられる数列$\{b_n\}$を，数列$\{a_n\}$の **階差数列** という。

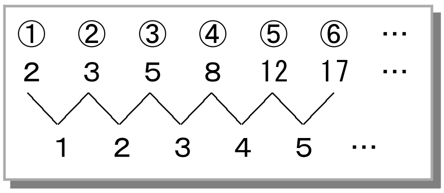


（例）数列　２，３，５，８，１２，１７，…の階差数列

この数列の階差数列は

１，２，３，４，５，…

となり，初項１，公差１の等差数列である。



【２】階差数列からもとの数列の一般項を求める

数列$\{a_n\}$の階差数列を数列$\{b_n\}$とすると，

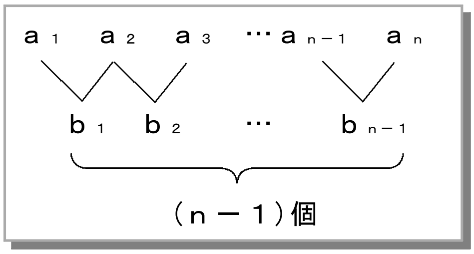
$\cancel{a_2} - a_1 = b_1$

$\cancel{a_3} - \cancel{a_2} = b_2$

$\cancel{a_4} - \cancel{a_3} = b_3$

$\cdots\cdots\cdots$

$a_n - \cancel{a_{n-1}} = b_{n-1}$



これらの式の各辺をそれぞれ加えると，

$n \geqq 2$のとき，

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

よって，$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

したがって、次のことが成り立つ。

▶階差数列と一般項

数列$\{a_n\}$の階差数列を数列$\{b_n\}$とすると，

$n \geqq 2$のとき，　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

＊ $a = 1$のときも成り立つかどうかは，

a_nの式に$n = 1$を代入して与えられたa_1と等しくなるか確認する。

4

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その３）

（２／７）■　階差タイプ　■

$$a_{n+1}=a_n+f(n)$$

◇《階差タイプ》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4n$　…①
で定義される数列の一般項 a_n を求めなさい。

【考え方】漸化式が $a_{n+1}-a_n$＝（nの入った式）の形に変形されるときは，
▲階差
その数列の一般項は階差数列を用いて求めることができる。

［答　案］

1 （階差数列の一般項を求める）

①より，$a_{n+1}-a_n=4n$ であるから，

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_n=4n$　…②　　◀階差数列の一般項

2 （一般項 a_n を求める）

②より，数列 $\{b_n\}$ は，数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから，

$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}4k$$
$$=1+4\sum_{k=1}^{n-1}k$$
$$=1+4\times\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$$
◀（n−1）項までの和
$$=2n^2-2n+1\quad\cdots③$$

$n=1$ のとき，

③に $n=1$ を代入すると，

$a_1=2\cdot1^2-2\cdot1+1=1$

となり，$n=1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n=2n^2-2n+1$

２・いろいろな数列　ナビ

学習資料	《階差数列》

★知識の整理★

【１】階差数列

(1)　階差数列の意味

数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は，

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与えられる数列である。

$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \cdots,\quad a_k,\quad a_{k+1},\quad \cdots,\quad a_{n-1},\quad a_n$

$b_1\quad b_2\quad b_3\quad\quad b_k\quad\quad b_{n-1}$

◀数列 $\{a_n\}$ の項数が n のとき，階差数列 $\{b_n\}$ の項数は $n-1$ となる。

(2)　階差数列から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 と階差数列 $\{b_n\}$ がわかると，一般項 a_n がわかる。

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1})$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

【注】$n \geqq 2$ のとき，求めた a_n に $n=1$ を代入し，a_1 と同じ値になるか必ずチェックする。

３・漸化式と数学的帰納法　ナビ

学習資料	《階差型漸化式》の具体例

$19 = \boxed{3} + (\underbrace{1+3+5+7}_{\sum_{k=1}^{5-1} b_k})$

$\{a_n\}$ ： $\boxed{3}$,　4,　7,　12,　***19***,　…

$\{b_n\}$ ：　1,　3,　5,　7,　…,　$2n-1$

$$a_5 = a_1 + \sum_{k=1}^{5-1} b_k$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{5-1} (2k-1)$$

$$= 3 + 2\sum_{k=1}^{4} k - \sum_{k=1}^{4} 1$$

$$= 3 + 2 \times \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4+1) - 4$$

$$= 3 + 20 - 4$$

$$= 19$$

｜メニューへ戻る｜

4

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その３）

（３／７）■　階差タイプ　■

◇《階差タイプ》**学力化**➡　／　，

★理解のチェック★

次の漸化式で決定される数列の一般項 a_n を求めなさい。

(1)　$a_1=3$，　$a_{n+1}=a_n+4n$

(2)　$a_1=5$，　$a_{n+1}=a_n+2n+4$

(3)　$a_1=2$，　$a_{n+1}=a_n+6n^2+4n+2$

［答　　案］

4

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その３）

（４／７）■　階差タイプ　■

◇《階差タイプ》**学力化**➡　　／　，

★演習★【１】

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1)　$a_1=2$，　$a_{n+1}=a_n+2n$

(2)　$a_1=2$，　$a_{n+1}=a_n+3n^2$

(3)　$a_1=1$，　$a_{n+1}=a_n+2^n$

【考え方】(3)　2^n は等比数列の和になる。

$2^n=2\cdot2^{n-1}$　より，初項２，公比２の等比数列である。

階差数列は，$n-1$ 項を加えるので，等比数列の項数は $n-1$ である！

［答　　案］

4

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その３）

（５／７）■　階差タイプ　■

◇《階差タイプ》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1)　$a_1=2$，　$a_{n+1}=a_n+3n+1$

(2)　$a_1=2$，　$a_{n+1}=a_n+2n^2+n$

(3)　$a_1=2$，　$a_{n+1}=a_n-3^n$

【考え方】(3)　2^n は等比数列の和になる。

$3^n=3\cdot 3^{n-1}$　より，初項３，公比３の等比数列である。

階差数列は，ｎ－１項を加えるので，等比数列の項数はｎ－１である！

［答　　案］

4

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法
1 漸化式（その３）
（６／７）■　階差タイプ　■

◇《階差タイプ》**学力化**➡　／　，

★演習★【３】

次の漸化式で決定される数列の一般項a_nを求めなさい。

(1)　$a_1=4$，　$a_{n+1}=a_n+2^{n+1}+2n+3$

(2)　$a_1=-3$，　$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$

【考え方】(2) 分母が整数の積である分数式の数列の和を求める。
→ 部分分数に分けると，途中の式の大部分が消える。
「いろいろな数列」No.６を参照。

［答　　案］

4

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その３）

（７／７）■　階差タイプ　■

◇《階差タイプ》**学力化**➡　　／　，

★演習★【４】

次の漸化式で決定される数列の一般項 a_n を求めなさい。

(1)　$a_1=6$，　$a_n=a_{n-1}+2n-2$

(2)　$a_1=3$，　$a_n=a_{n-1}+n^2-2n+3$

【考え方】「$a_n=a_{n-1}+n$ の式」の形に注意！　いままでに出てこない形！

では，いままでにでてきた形に変えればよい！

(1)　$a_n=a_{n-1}+2n-2$

⬇ n を $n+1$ に置き換えればよい。

$a_{n+1}=a_n+2(n+1)-2$

$a_{n+1}=a_n+2n$　…いままでにでてきた形になった！

あとは，いつもの通りに解けばよい。

［答　　案］