



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その2)

(1/7) ■ 特性方程式タイプ ■

$$a_{n+1} = pa_n + q \text{ (その1) - 考え方 -}$$

★解法の技術★

次のように定義される数列の一般項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 4, \quad a_{n+1} - 1 = 5(a_n - 1)$$

【考え方】等比 ($a_{n+1} = r a_n$) タイプ

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = r a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義される数列は、初項 a 、公比 r の等比数列である。

よって、一般項は、 $a_n = a r^{n-1}$

【考える手順】

1 数列 $\{a_n - 1\}$ の定義
と一般項

2 一般項 a_n

【答 案】

数列 $\{a_n - 1\}$ は、初項 $a_1 - 1 = 4 - 1 = 3$ 、公比 5 の等比数列であるから、

$$a_n - 1 = 3 \cdot 5^{n-1}$$

よって、 $a_n = 3 \cdot 5^{n-1} + 1$

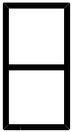
◇ 《特性方程式タイプの考え方》 **学力化** → / ,

★理解のチェック★

次のように定義される数列の一般項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} + 3 = -4(a_n + 3)$$

【答 案】



$$a_{n+1} = p a_n + q \text{ (その2)}$$

★知識の整理★

【1】 $a_{n+1} = p a_n + q$ の形の漸化式

$a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3 a_n - 4$ で定義される数列 $\{a_n\}$ は,

$$3, 5, 11, 29, \dots$$

である。この数列の各項から2を引いてできる数列 $\{a_n - 2\}$ は,

$$1, 3, 9, 27, \dots$$

となるが、この数列は初項1, 公比3の等比数列となっている。

したがって、数列 $\{a_n - 2\}$ の一般項は、 $a_n - 2 = 1 \cdot 3^{n-1}$ となり,

$$a_n = 3^{n-1} + 2$$

一般に、 p, q が0でない定数で $p \neq 1$ のとき、漸化式が、

$$a_{n+1} = p a_n + q \quad \dots \textcircled{1}$$

で表される数列 $\{a_n\}$ について、

$$a_{n+1} - \alpha = p (a_n - \alpha) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる α を見つけることができれば、

数列 $\{a_n - \alpha\}$ は、初項 $a_1 - \alpha$, 公比 p の等比数列となる。

このことを利用して数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めることができる。

この α を見つけるには、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ を考えて、
 $\alpha = q + p \alpha$ を解けばよい。

◀ a_{n+1} と a_n を同時に消去し、 α についての方程式が
 作れるから。

(例) $a_{n+1} = 3 a_n - 2$ の変形のしかた

$$a_{n+1} = 3 a_n - 2$$

$$-) a_{n+1} - \alpha = 3 (a_n - \alpha)$$

$$\alpha = -2 + 3 \alpha$$

$$\alpha = 1$$

$$\text{よって、} a_{n+1} - 1 = 3 (a_n - 1)$$

◀これが特性方程式

◀ α が見つかった!

◀等比型漸化式になった!



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その2)

(3/7) ■ 特性方程式タイプ ■

◇ 《特性方程式型》 **学力化** → / ,

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第 n 項 a_n を求めなさい。

$$a_1 = 10, \quad a_{n+1} = 5a_n - 12$$

[答 案]

$$a_1 = 10 \quad \cdots \textcircled{1}, \quad a_{n+1} = 5a_n - 12 \quad \cdots \textcircled{2}$$

1 (2)を等比数列型漸化式に変形する)

$$\textcircled{2}が, \quad a_{n+1} - \alpha = 5(a_n - \alpha) \quad \cdots \textcircled{3} \quad \leftarrow \text{等比型漸化式}$$

と変形できたとする。

欄外《別解》

②-③より,

$$a_{n+1} = 5a_n - 12$$

$$-) \quad a_{n+1} - \alpha = 5(a_n - \alpha)$$

$$\hline \alpha = -12 + 5\alpha$$

$$\alpha = 3 \quad \leftarrow \text{これが特性方程式}$$

③で, $\alpha = 3$ のとき,

$$a_{n+1} - 3 = 5(a_n - 3) \quad \cdots \textcircled{4} \quad \leftarrow \text{等比型漸化式になった!}$$

2 (a_n を求める)④より, 数列 $\{a_n - 3\}$ は,

$$\text{初項 } a_1 - 3 = 10 - 3 = 7, \quad \text{公比 } 5$$

の等比数列であるから, 一般項は,

$$a_n - 3 = 7 \cdot 5^{n-1}$$

-3を移項して,

$$\underline{a_n = 7 \cdot 5^{n-1} + 3}$$

* 《別解》

1 ②において,

 a_{n+1} と a_n を α とおいた方程式(特性方程式)を解くと,

$$\alpha = 5\alpha - 12 \text{ より,}$$

$$\alpha = 3$$



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その2)

(4/7) ■ 特性方程式タイプ ■

◇《特性方程式型》**学力化**→ / ,

-----★理解のチェック★-----

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + 8$ (2) $a_1 = 4, a_{n+1} = -2a_n + 3$

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その2)

(5/7) ■ 特性方程式タイプ ■

◇《特性方程式タイプ》**学力化**→ / ,

★演習★【1】

次の漸化式で決定される数列の第n項 a_n を求めなさい。

(1) $a_1 = -9, a_{n+1} = 6a_n - 15$ (2) $a_1 = 4, a_{n+1} = 2a_n + 4$

【考え方】(1) $6 \times 6^{n-1} = 6^{n-1+1} = 6^n$

(これは、 $\chi \times \chi^{10} = \chi^{11}$ と同じ理屈!) 2

(2) $2^3 \times 2^{n-1} = 2^{n-1+3} = 2^{n+2}$

(これは、 $\chi^3 \times \chi^{10} = \chi^{3+10} = \chi^{13}$ と同じ理屈!)

このように、指数は計算して答えます。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その2)

(6/7) ■ 特性方程式タイプ ■

◇《特性方程式タイプ》**学力化**→ / ,

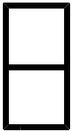
★演習★【2】

次の漸化式で決定される数列の第 n 項 a_n を求めなさい。

(1) $a_1 = 3, a_n = 5a_{n-1} - 8$ (2) $a_1 = 10, 3a_{n+1} = 2a_n - 3$

- 【考え方】(1) $a_n = 5a_{n-1} - 8$ は、 $a_{n+1} = 5a_n - 8$ と同じことです。項が1つずれているだけです。 $a_{n+1} = 5a_n - 8$ から第 n 項 a_n を求めます。
 $a_n - \alpha = 5(a_{n-1} - \alpha)$ と変形できたとし、特性方程式を作り、 α を求めます。
- (2) 両辺を3で割って、 $a_{n+1} = \sim$ の特性方程式タイプへ持っていきます。

[答 案]



第1章 数列 3・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式(その2)

(7/7) ■ 特性方程式タイプ ■

◇《特性方程式タイプ》**学力化**→ / ,

★演習★【3】

次の漸化式で決定される数列の第 n 項 a_n を求めなさい。

(1) $a_1 = -6, 5a_{n+1} - 3a_n + 8 = 0$

(2) $a_1 = \frac{1}{2}, 2a_{n+1} - 7a_n - 15 = 0$

【考え方】(1) 左辺の不要な項を右辺へ移項し, $5a_{n+1} = \sim$ とし, 両辺を5で割って,
 $a_{n+1} = \sim$ の特性方程式タイプへ持っていきます。

(2) (1) と同じようにして, $a_{n+1} = \sim$ の特性方程式タイプへ持っていきます。

[答 案]