3

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法
1 漸化式（その２）
（１／７）■　特性方程式タイプ　■

$a_{n+1}=pa_n+q$（その１）―考え方―

★解法の技術★

次のように定義される数列の一般項 a_n を求めなさい。
$a_1=4,\ a_{n+1}-1=5(a_n-1)$

【考え方】等比（$a_{n+1}=ra_n$）タイプ
$a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
で定義される数列は，初項 a，公比 r の等比数列である。
よって，一般項は，$a_n=ar^{n-1}$

［考える手順］	［答　　案］
1　数列 $\{a_n-1\}$ の定義と一般項	数列 $\{a_n-1\}$ は，初項 $a_1-1=4-1=3$，公比５の等比数列であるから， $a_n-1=3\cdot5^{n-1}$
2　一般項 a_n	よって，$a_n=3\cdot5^{n-1}+1$

◇《特性方程式タイプの考え方》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★
次のように定義される数列の一般項 a_n を求めなさい。
$a_1=2,\ a_{n+1}+3=-4(a_n+3)$

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

$a_{n+1}=pa_n+q$（その２）

★知識の整理★

【１】$a_{n+1}=pa_n+q$の形の漸化式

$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-4$で定義される数列$\{a_n\}$は，

$3,\ 5,\ 11,\ 29,\ \cdots$

である。この数列の各項から２を引いてできる数列$\{a_n-2\}$は，

$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \cdots$

となるが，この数列は初項１，公比３の等比数列となっている。

したがって，数列$\{a_n-2\}$の一般項は，$a_n-2=1\cdot 3^{n-1}$となり，

$a_n=3^{n-1}+2$

一般に，p，qが０でない定数で$p\neq 1$のとき，漸化式が，

$a_{n+1}=pa_n+q$　　　…①

で表される数列$\{a_n\}$について，

$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$　…②

となるαを見つけることができれば，

数列$\{a_n-\alpha\}$は，初項$a_1-\alpha$，公比pの等比数列となる。

このことを利用して数列$\{a_n\}$の一般項a_nを求めることができる。

このαを見つけるには，①－②を考えて，$\alpha=q+p\alpha$を解けばよい。

◀a_{n+1}とa_nを同時に消去し，αについての方程式が作れるから。

（例）　$a_{n+1}=3a_n-2$の変形のしかた

$$
\begin{array}{rrl}
 & a_{n+1} & =3a_n-2 \\
-) & a_{n+1}-\alpha & =3(a_n-\alpha) \\
\hline
 & \alpha & =-2+3\alpha
\end{array}
$$

◀これが特性方程式

$\alpha=1$　◀αが見つかった！

よって，$a_{n+1}-1=3(a_n-1)$　◀等比型漸化式になった！

3

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法
1 漸化式（その２）
 ■　特性方程式タイプ　■

◇《特性方程式型》 学力化➡　／　，

★解法の技術★

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項 a_n を求めなさい。
$a_1 = 10$,　$a_{n+1} = 5a_n - 12$

［答　　案］
$a_1 = 10$ …①,　$a_{n+1} = 5a_n - 12$ …②

$\boxed{1}$（②を等比数列型漸化式に変形する）
②が，$a_{n+1} - \alpha = 5(a_n - \alpha)$ …③　◀等比型漸化式
と変形できたとする。

欄外《別解》
②－③より，

$$\begin{array}{rrl} & a_{n+1} & = 5a_n - 12 \\ -) & a_{n+1} - \alpha & = 5(a_n - \alpha) \\ \hline & \alpha & = -12 + 5\alpha \\ & \alpha & = 3 \end{array}$$

◀これが特性方程式

③で，$\alpha = 3$ のとき，
$a_{n+1} - 3 = 5(a_n - 3)$ …④　◀等比型漸化式になった！

$\boxed{2}$（a_n を求める）
④より，数列 $\{a_n - 3\}$ は，
初項　$a_1 - 3 = 10 - 3 = 7$，公比　5
の等比数列であるから，一般項は，
$a_n - 3 = 7 \cdot 5^{n-1}$
－３を移項して，
$\underline{a_n = 7 \cdot 5^{n-1} + 3}$

＊《別解》
$\boxed{1}$ ②において，
a_{n+1} と a_n を α とおいた方程式（特性方程式）を解くと，
$\alpha = 5\alpha - 12$ より，
$\alpha = 3$

｜メニューへ戻る｜

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

１ 漸化式（その２）

（４／７）■　特性方程式タイプ　■

◇《特性方程式型》 学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=5a_n+8$　　(2) $a_1=4$，$a_{n+1}=-2a_n+3$

［答　案］

3

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その２）

（５／７）■　特性方程式タイプ　■

◇《特性方程式タイプ》**学力化**➡　／　,

★演習★【１】

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項a_nを求めなさい。

(1)　$a_1=-9$，$a_{n+1}=6a_n-15$　　(2)　$a_1=4$，$a_{n+1}=2a_n+4$

【考え方】(1)　$6\times6^{n-1}=6^{n-1+1}=6^n$

（これは，$\chi\times\chi^{10}=\chi^{11}$と同じ理屈！）　２

(2)　$2^3\times2^{n-1}=2^{n-1+3}=2^{n+2}$

（これは，$\chi^3\times\chi^{10}=\chi^{3+10}=\chi^{13}$と同じ理屈！）

このように，指数は計算して答えます。

［答　案］

｜メニューへ戻る｜

◇《特性方程式タイプ》学力化➡　／　，

★演習★【２】

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項 a_n を求めなさい。

(1)　$a_1=3$，$a_n=5a_{n-1}-8$　　　(2)　$a_1=10$，$3a_{n+1}=2a_n-3$

【考え方】(1)　$a_n=5a_{n-1}-8$ は，$a_{n+1}=5a_n-8$ と同じことです。項が１つずれているだけです。$a_{n+1}=5a_n-8$ から第ｎ項 a_n を求めます。

$a_n-\alpha=5(a_{n-1}-\alpha)$ と変形できたとし，特性方程式を作り，α を求めます。

(2)　両辺を３で割って，$a_{n+1}=$～の特性方程式タイプへ持っていきます。

［答　　案］

3

第１章　数列　３・漸化式と数学的帰納法

1 漸化式（その２）

（７／７）■　特性方程式タイプ　■

◇《特性方程式タイプ》**学力化**➡　／　，

★演習★【３】

次の漸化式で決定される数列の第ｎ項a_nを求めなさい。

(1)　$a_1=-6$，$5a_{n+1}-3a_n+8=0$

(2)　$a_1=\dfrac{1}{2}$，$2a_{n+1}-7a_n-15=0$

【考え方】(1)　左辺の不要な項を右辺へ移項し，$5a_{n+1}=$〜とし，両辺を５で割って，$a_{n+1}=$〜の特性方程式タイプへ持っていきます。

(2)　(1)　と同じようにして，$a_{n+1}=$〜の特性方程式タイプへ持っていきます。

［答　　案］