１０	第１章　数列　２・いろいろな数列
	８ 格子点の個数
	（１／５）　　　　－〈１枚目／４枚〉

格子点の個数

◇《格子点の個数》学力化➡　　／　，

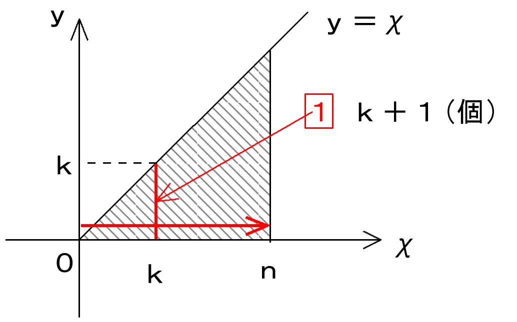
★解法の技術★

【１型】

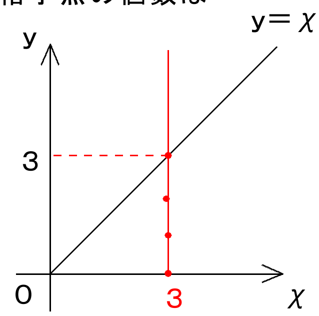
χｙ平面上で，χ座標，ｙ座標がともに整数である点を格子点という。ｎを自然数とするとき，不等式$0 \leqq x \leqq n$，$0 \leqq y \leqq n$，および$x - y \geqq 0$を表す領域に含まれる格子点の個数を求めよ。

［答　　案］

《図的状況》



1　与えられた領域内で，
直線$x=k$上に並ぶ格子点の個数は
　　$k+1$（個）
例えば，
直線$x=3$上に並ぶ
格子点の個数は
　　$3+1$（個）



2　χ軸方向に格子点の和を取ると，格子点の総数は，

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1) = \underbrace{(0+1)}_{k=0\text{のとき}} + \sum_{k=1}^{n}(k+1)$$

◀ $\sum_{k=1}^{n}$ 公式は$n=1$からスタートする。

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

$$= 1 + \frac{1}{2}n(1+n) + n$$

$$= 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 + n$$

$$= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$

$$= \frac{1}{2}(n^2+3n+2)$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad \text{（個）}$$

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

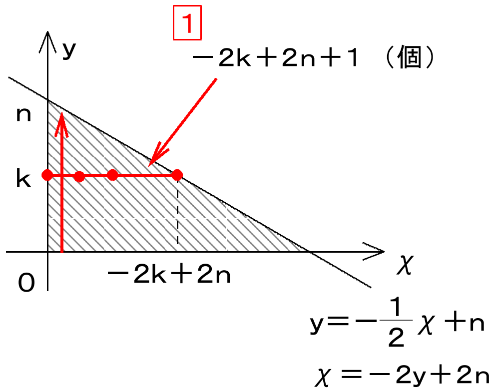
↗（前のページからのつづき）

【２型】

連立不等式　$\chi \geqq 0$，　$y \geqq 0$，　$\chi + 2y \leqq 2n$　の表す領域に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし，　nは自然数とする。

［答　　案］

《図的状況》



1　与えられた領域内で，
直線 $y = k$ 上に並ぶ格子点の個数は
$-2k+2n+1$（個）

2　y軸方向に格子点の和を取ると，格子点の総数は，

$$\sum_{k=0}^{n}(-2k+2n+1) = \underbrace{-2\cdot 0+2n+1}_{k=0\text{のとき}} + \sum_{k=1}^{n}(-2k+2n+1)$$

$$= 2n+1-2\sum_{k=1}^{n}k + 2n\sum_{k=1}^{n}1 + \sum_{k=1}^{n}1$$

$$= 2n+1-2\cdot\frac{1}{2}n(1+n) + 2n\cdot n + n$$

$$= 2n+1-n-n^2+2n^2+n$$

$$= n^2+2n+1$$

$$= \underline{(n+1)^2\ \text{（個）}}$$

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

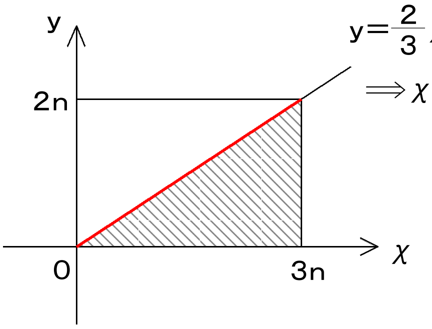
↗（前のページからのつづき）

【３型】

自然数ｎに対して，直線ℓ：２χ－３ｙ＝０および直線χ＝３ｎ，ｙ＝２ｎで囲まれる三角形の周および内部にある格子点の個数を求めよ。

［答　　案］

《図的状況》



$y=\frac{2}{3}\chi$

$\Longrightarrow \chi=\frac{3}{2}y$

χ＝ｋとおいても，ｙ＝ｋとおいても三角形の斜辺上に格子点がとれないときがあるときは…

1 長方形の周と内部の格子点の個数を求める。

2 対角線上の格子点の個数を求める。

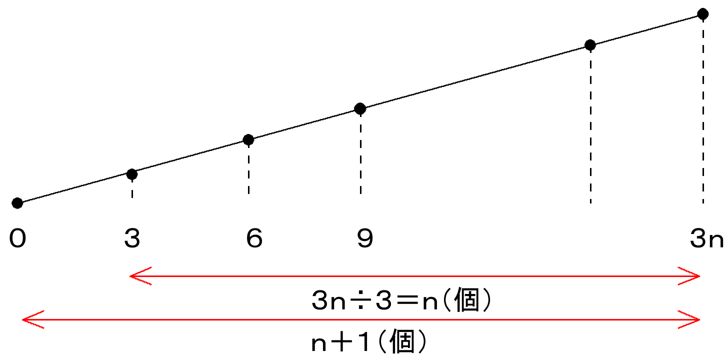
3 次の公式で，三角形の周および内部の格子点の個数を求める。

$$\frac{\text{長方形}-\text{対角線}}{2}+\text{対角線}$$

1 長方形の周と内部の格子点の個数は，

（２ｎ＋１）（３ｎ＋１）

2 対角線上の格子点の個数は



3 三角形の周および内部にある格子点の総数は，

$$\frac{(2n+1)(3n+1)-(n+1)}{2}+(n+1)$$

◀（ｎ＋１）は対角線上の格子点の個数

$$=\frac{6n^2+2n+3n+1-n-1+2n+2}{2}$$

$$=\frac{6n^2+6n+2}{2}$$

$$=3n^2+3n+1\ (\text{個})$$

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

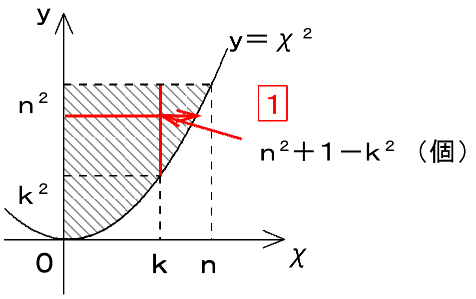
↗（前のページからのつづき）

【４型】

連立不等式　$\chi \geqq 0$，　$y \leqq n^2$，　$y \geqq \chi^2$　の表す領域に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし，　n は自然数とする。

［答　　案］

《図的状況》



$\boxed{1}$　与えられた領域内で，
直線 $\chi = k$ 上に並ぶ格子点の個数は
n^2+1-k^2（個）

$\boxed{2}$　χ 軸方向に格子点の和を取ると，格子点の総数は，

$$\sum_{k=0}^{n}(n^2+1-k^2) = \underbrace{(n^2+1-0^2)}_{K=0\text{のとき}} + \sum_{k=1}^{n}(n^2+1-k^2)$$

◀ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ 公式は $n=1$ からスタートする。

$$= n^2+1+(n^2+1)\sum_{k=1}^{n}1 - \sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$= n^2+1+(n^2+1)n - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= (n+1)(n^2+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\{6(n^2+1)-n(2n+1)\}$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(6n^2+6-2n^2-n)$$

$$= \underline{\frac{1}{6}(n+1)(4n^2-n+6)}\ （個）$$

｜メニューへ戻る｜

１０

第１章　数列　２・いろいろな数列

8 格子点の個数

（２／５）

◇《格子点の個数》**学力化**➡　　／　，

★理解のチェック★

次の連立不等式の表す領域に含まれる格子点の個数を求めよ。ただし，ｎは自然数とする。

(1)　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x + 3y \leqq 3n$

(2)　$0 \leqq x \leqq n$，$y \geqq x^2$，$y \leqq 2x^2$

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

◇《格子点の個数》学力化➡　　／　，

★演習★【１】

xy平面上で，x座標，y座標がともに整数である点を格子点という。nを自然数とするとき，不等式 $0 \leqq x \leqq n$，および $0 \leqq y \leqq -x^2+n^2$ の表す領域に含まれる格子点の個数を求めよ。

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

１０

第１章　数列　２・いろいろな数列

8 格子点の個数

（４／５）

◇《格子点の個数》**学力化**➡　　／　，

★演習★【２】

自然数ｎに対して，直線ℓ：２χ＋３ｙ＝６ｎ および 直線χ＝０，ｙ＝０で囲まれる三角形の周および内部にある格子点の個数を求めよ。

［答　　案］

１０

第１章　数列　２・いろいろな数列
８ 格子点の個数
（５／５）

◇《格子点の個数》**学力化**➡　　／　，

★演習★【３】

次の条件を満たす整数の組（χ，　ｙ）はいくつあるか。

(1)　$0 \leqq y \leqq 500$，　$0 \leqq \chi \leqq \sqrt{y}$

(2)　$0 \leqq \chi \leqq 20$，　$0 \leqq y \leqq \chi^2$

［答　　案］