７

第１章　数列　２・いろいろな数列
５ いろいろな数列の和（その２）
（１／７）■　（等差数列）×（等比数列）の和　■

（等差数列）×（等比数列）の和

★解法の技術★

次の和Ｓを求めなさい。
$S=2\cdot 1+4\cdot 3+6\cdot 3^2+8\cdot 3^3+\cdots+2n\cdot 3^{n-1}$

【考え方】（等差数列）×（等比数列）の和は，Ｓ－ｒＳを利用する。
＊「等比数列の和の公式の導き方」を参照（次のページに資料あり）

［考える手順］
［答　　案］

1 数列を定義する

求める和は，
（初項２，公差２の等差数列）×（初項１，公比３の等比数列）
の和になっている。

2 S－rS

与式から，与式の両辺に等比数列の公比３をかけた式を辺々引くと，

$$
\begin{array}{rl}
S= & 2\cdot 1+4\cdot 3+6\cdot 3^2+8\cdot 3^3+\cdots\quad+2n\cdot 3^{n-1} \\
-)\ 3S= & \qquad 2\cdot 3+4\cdot 3^2+6\cdot 3^3+\cdots+2(n-1)\cdot 3^{n-1}+2n\cdot 3^n \\
\hline
-2S= & 2\cdot 1+\underbrace{2\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots\quad+2\cdot 3^{n-1}}-2n\cdot 3^n
\end{array}
$$

▲初項2，公比3の等比数列の第2項から第n項までの和
（初項から第n項までの和）－（初項）

3 Sを求める

$$-2S=2+\frac{2(3^n-1)}{3-1}-2\quad-2n\cdot 3^n$$ ◀等比数列の和を計算

$$-2S=2+3^n-1-2-2n\cdot 3^n$$

$$-2S=(1-2n)\cdot 3^n-1$$ ◀共通因数3^nを括り出す

$$S=\frac{(2n-1)\cdot 3^n+1}{2}$$ ◀両辺を－2でわる

【注意点】 2 公比の次数が縦にそろうように式を書く。
辺々引いた後の式では，まず，「等比数列の和」の部分を求めておく。

《資料》　《等比数列の和》

★知識の整理★

【１】等比数列の和（具体例）

初項２，公比３，項数５の等比数列の和　$S=2+6+18+54+162$　から，両辺を３倍したものを右のように項を１つづつずらして引くと，

$S-3S=2-486$

$-2S=-484$

よって，　$S=242$

$$
\begin{array}{rl}
S= & 2+(6+18+54+162) \\
\times 3 & \\
-)\ 3S= & \quad\ \ (6+18+54+162)+486 \\
\hline
-2S= & 2 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -486
\end{array}
$$

【２】等比数列の和（一般例）

一般に，初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$S_n=a+\boxed{ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}}$　…①

①の両辺に公比 r を掛けて，

$rS_n=\boxed{ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}}+ar^n$　…②

①－②より，

$(1-r)S_n=a-ar^n=a(1-r^n)$

したがって，$r\neq0$　のとき，$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

＊この考え方を覚えること

また，$r=1$ のとき，S_n は n 個の a の和であるから，

$S_n=a+a+a+\cdots+a=na$

したがって，次の公式が成り立つ。

▶等比数列の和

初項 a，公比 r，項数 n　の等比数列の和を S_n とすると，

$r\neq1$　のとき

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\quad\cdots《基本型》$$

↑ $r<1$ のとき　　↑ $r>1$ のとき

＊ $r=1$ のとき

$S_n=na$

｜メニューへ戻る｜

第１章　数列　２・いろいろな数列
５ いろいろな数列の和（その２）
（２／７）■　（等差数列）×（等比数列）の和　■

◇《（等差数列）×（等比数列）の和》 **学力化**➡　　／　，

★理解のチェック★

次の和Ｓを求めなさい。

$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^{n-1}$

［答　　案］

第１章　数列　２・いろいろな数列

５ いろいろな数列の和（その２）

（３／７）■　(等差数列)×(等比数列)の和　■

◇《(等差数列)×(等比数列)の和》 学力化➡　　／　，

★演習★【１】

次の和Ｓを求めなさい。

$S=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

◇《（等差数列）×（等比数列）の和》 学力化➡　　／　，

★演習★【２】

次の和Ｓを求めなさい。

$S=1\cdot 3+3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+7\cdot 3^4+\cdots+(2n-1)\cdot 3^n$

［答　　案］

ア

第１章　数列　２・いろいろな数列

５ いろいろな数列の和（その２）

（５／７）■　(等差数列)×(等比数列)の和　■

◇《(等差数列)×(等比数列)の和》 **学力化** ➡　　／　，

★演習★【３】

次の数列の初項から第ｎ項までの和S_nを求めなさい。

(1)　$2\cdot 3+4\cdot 3^2+6\cdot 3^3+\cdots+2n\cdot 3^n$

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

第１章　数列　２・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その２）

（６／７）■　（等差数列）×（等比数列）の和　■

◇《（等差数列）×（等比数列）の和》 **学力化**➡　　／　　,

★演習★【４】

次の数列の初項から第ｎ項までの和S_nを求めなさい。

$1\cdot 2+3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n$

［答　　案］

７

第１章　数列　２・いろいろな数列

５ いろいろな数列の和（その２）

（７／７）■　（等差数列）×（等比数列）の和　■

◇《（等差数列）×（等比数列）の和》 学力化➡　／　，

★演習★【５】

次の数列の初項から第ｎ項までの和S_nを求めなさい。

$1+2\chi+3\chi^2+\cdots+n\chi^{n-1}$

【考え方】$S_n=1+2\chi+3\chi^2+\cdots+n\chi^{n-1}$　…①

①の両辺に公比χをかけて，

$\chi S_n=\chi+2\chi^2+3\chi^3+\cdots+(n-1)\chi^{n-1}+n\chi^n$　…②

①－②を計算します。$\chi=1$か$\chi\neq1$で場合分けが必要です。

［答　　案］