

第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和 (その2)

(1/7) ■ (等差数列) × (等比数列)の和 ■

(等差数列) × (等比数列)の和

★解法の技術★

次の和Sを求めなさい。

$$S = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^3 + \dots + 2n \cdot 3^{n-1}$$

【考え方】(等差数列) × (等比数列)の和は、 $S - rS$ を利用する。

* 「等比数列の和の公式の導き方」を参照 (次のページに資料あり)

[考える手順]

1 数列を定義する

[答 案]

求める和は、

(初項2, 公差2の等差数列) × (初項1, 公比3の等比数列)の和になっている。

2 $S - rS$

与式から、与式の両辺に等比数列の公比3をかけた式を辺々引くと、

$$\begin{array}{r} S = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3^3 + \dots + 2n \cdot 3^{n-1} \\ -) 3S = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + \dots + 2(n-1) \cdot 3^{n-1} + 2n \cdot 3^n \\ \hline -2S = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} - 2n \cdot 3^n \end{array}$$

▲初項2, 公比3の等比数列の第2項から第n項までの和
(初項から第n項までの和) - (初項)

3 Sを求める

$$-2S = 2 + \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1} - 2 - 2n \cdot 3^n \quad \leftarrow \text{等比数列の和を計算}$$

$$-2S = 2 + 3^n - 1 - 2 - 2n \cdot 3^n$$

$$-2S = (1 - 2n) \cdot 3^n - 1 \quad \leftarrow \text{共通因数} 3^n \text{を括り出す}$$

$$S = \frac{(2n - 1) \cdot 3^n + 1}{2} \quad \leftarrow \text{両辺を} -2 \text{でわる}$$

【注意点】 2 公比の次数が縦にそろうように式を書く。

辺々引いた後の式では、まず、「等比数列の和」の部分求めておく。

《資料》 《等比数列の和》

★知識の整理★

【1】等比数列の和（具体例）

初項2，公比3，項数5の等比数列の和 $S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162$ から，両辺を3倍したものを右のように項を1つずつずらして引くと，

$$\begin{aligned} S - 3S &= 2 - 486 \\ -2S &= -484 \\ \text{よって, } S &= 242 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} S = 2 + (6 + 18 + 54 + 162) \\ \times 3 \quad \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\ -) 3S = (6 + 18 + 54 + 162) + 486 \\ \hline -2S = 2 \qquad \qquad \qquad -486 \end{array}$$

【2】等比数列の和（一般例）

一般に，初項 a ，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \dots \text{①}$$

①の両辺に公比 r を掛けて，

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad \dots \text{②}$$

①-②より，

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

したがって， $r \neq 0$ のとき， $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

* この考え方を覚えること

また， $r = 1$ のとき， S_n は n 個の a の和であるから，

$$S_n = a + a + a + \dots + a = na$$

したがって，次の公式が成り立つ。

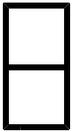
▶等比数列の和

初項 a ，公比 r ，項数 n の等比数列の和を S_n とすると，

$$r \neq 1 \text{ のとき} \\ S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad \dots \text{《基本型》} \\ \uparrow r < 1 \text{ のとき} \quad \uparrow r > 1 \text{ のとき}$$

* $r = 1$ のとき

$$S_n = na$$



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その2）

（2 / 7） ■ （等差数列）×（等比数列）の和 ■

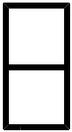
◇ 《（等差数列）×（等比数列）の和》 **学力化** → / ,

★理解のチェック★

次の和Sを求めなさい。

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^{n-1}$$

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その2）

（3 / 7） ■ （等差数列）×（等比数列）の和 ■

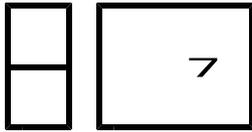
◇ 《（等差数列）×（等比数列）の和》 **学力化** → / ,

★演習★【1】

次の和Sを求めなさい。

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n-1}$$

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和 (その2)

(4/7) ■ (等差数列) × (等比数列) の和 ■

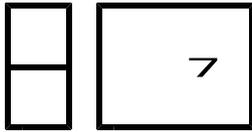
◇ 《(等差数列) × (等比数列) の和》 **学力化** → / ,

★演習★【2】

次の和Sを求めなさい。

$$S = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^4 + \dots + (2n - 1) \cdot 3^n$$

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その2）

(5/7) ■ (等差数列) × (等比数列)の和 ■

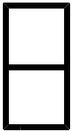
◇ 《(等差数列) × (等比数列)の和》 **学力化** → / ,

★演習★【3】

次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい。

(1) $2 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + \dots + 2n \cdot 3^n$

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その2）

(6/7) ■ (等差数列) × (等比数列)の和 ■

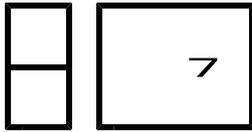
◇ 《(等差数列) × (等比数列)の和》 **学力化** → / ,

★演習★【4】

次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい。

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \dots + (2n - 1) \cdot 2^n$$

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和 (その2)

(7 / 7) ■ (等差数列) × (等比数列) の和 ■

◇ 《(等差数列) × (等比数列) の和》 **学力化** → /

★演習★【5】

次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい。

$$1 + 2\chi + 3\chi^2 + \dots + n\chi^{n-1}$$

【考え方】 $S_n = 1 + 2\chi + 3\chi^2 + \dots + n\chi^{n-1}$ …①

①の両辺に公比 χ をかけて、

$$\chi S_n = \chi + 2\chi^2 + 3\chi^3 + \dots + (n-1)\chi^{n-1} + n\chi^n \quad \dots②$$

①-②を計算します。 $\chi = 1$ か $\chi \neq 1$ で場合分けが必要です。

[答 案]