｜メニューへ戻る｜

6

第１章　数列　２・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その１）

（１／８）■　分数数列の和　■

部分分数に分ける

★知識の整理★

【１】部分分数に分ける

$\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ のような分母が整数の積の分数式は，分母の因数をそれぞれ分母とした分子が１の差の形に変形することができる。

公式　$\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

《具体例》

Ⅰ型　$\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$　◀（証明）$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n+2-n}{n(n+2)}=\dfrac{1}{n(n+2)}$

$(n+2)-n=2$

Ⅱ型　$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{1}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$(n+1)-n=1$

Ⅲ型　$\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{2}{1}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$　◀（証明）$2\cdot\dfrac{n+1-n}{n(n+1)}=\dfrac{2}{n(n+1)}$

$(n+1)-n=1$

★

一般型　$\dfrac{2}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$

$(3n+2)-(3n-1)=3$

【注】このような式の変形を，「**部分分数に分ける**」といいます。

＊【参考】分母の因数が３個の場合　◀№.6sで利用する。

(1)　$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$

前から2つ　後から2つ

$(n+2)-n=2$

(2)　$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right\}$

前から2つ　後から2つ

（２ｎ＋３）－（2ｎ－１＝４

6

第１章　数列　２・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その１）

（２／８）■　分数数列の和　■

◇《部分分数に分ける》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

次の分数を部分分数に分けなさい。

(1) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2) $\dfrac{1}{(n+3)(n+5)}$

(3) $\dfrac{1}{2n(2n+2)}$

(4) $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+4)}$

(5) $\dfrac{5}{(6n-1)(6n+5)}$

(6) $\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)(3n+5)}$

［答　　案］

(1) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$

(2) $\dfrac{1}{(n+3)(n+5)} =$

(3) $\dfrac{1}{2n(2n+2)} =$

(4) $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+4)} =$

(5) $\dfrac{5}{(6n-1)(6n+5)} =$

(6) $\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)(3n+5)} =$

｜メニューへ戻る｜

分数数列の和

◇《分数数列の和》学力化➡　／　，

★解法の技術★

次の和を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{2\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot8}+\dfrac{1}{8\cdot11}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$

【考え方】＊特殊な計算　・分母に$\sqrt{}$ を含む数列は，まず **分母の有理化** をする。
・分数や$\sqrt{}$ を含む数列の和がΣを使って表されているときは，**各項の和の形** に書き直す。

［答　案］

(1) $\boxed{1}$　（一般項を部分分数に分ける）

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$$

◀数列の和をΣで表す

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$$

◀部分分数に分けた→№6（１／８）を参照

$\boxed{2}$　（数列の和を求める）

$$=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k+2}\right)$$

一気に消える！

◀Σの分配法則

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3n-1}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$$

◀Σを和の形へ

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

◀（　）内の後項は－であること注意

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3n+2-2}{2(3n+2)}$$

◀（　）内を通分

$$=\frac{n}{2(3n+2)}$$

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

(2) $\boxed{1}$ （分母を有理化する）

$$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}$$

$$=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$$

$\boxed{2}$ （数列の和を求める）

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$ ◀分母を有理化

一気に消える！

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+2}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k+1}$$ ◀Σの分配法則

$$=(\sqrt{3+2}+\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$$ ◀Σを和の形へ

$$-(\sqrt{2}+\sqrt{3+2}+\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{n+1})$$

$$=\underline{\sqrt{n+2}-\sqrt{2}}$$ ◀後項は－であること注意

６

第１章　数列　２・いろいろな数列

５ いろいろな数列の和（その１）

（４／８）■　分数数列の和　■

◇《分数数列の和》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

次の和を求めなさい。

× (1) $\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

× (2) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(3) $\dfrac{1}{4\cdot6}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\dfrac{1}{6\cdot8}+\cdots+\dfrac{1}{(n+3)(n+5)}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

【注】×印の問題は解く必要はありません。前問が解けなかった場合にのみ解いてください。

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

第１章　数列　２・いろいろな数列

５ いろいろな数列の和（その１）

（５／８）■　分数数列の和　■

◇《分数数列の和》**学力化**➡　　／　，

★演習★【１】

次の和を求めなさい。

×(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

×(2) $\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}$

(3) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$

【注】×印の問題は解く必要はありません。前問が解けなかった場合にのみ解いてください。

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

◇《分数数列の和》学力化➡　／　,

★演習★【２】

次の和を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(3) $\dfrac{1}{1\cdot 7}+\dfrac{1}{4\cdot 10}+\dfrac{1}{7\cdot 13}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+4)}$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

【考え方】(4) 分母の有理化をするために，いったんΣを使って表す。

［答　　案］

6

第１章　数列　２・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その１）

（７／８）■　分数数列の和　■

◇《分数数列の和》学力化➡　　／　，

★演習★【３】

次の和を求めなさい。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+3k+2}$

(2) $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+4+\cdots+n}$

【考え方】(1) 分母を因数分解すると，部分分数に分けることができる。

(2) 各項が数列の和で表されている場合は，まず，一般項を考える。（k で表す）次に，和をΣを使って表し，分母が連続した整数の積のとき，部分分数に分ける。

［答　　案］

６

第１章　数列　２・いろいろな数列

５ いろいろな数列の和（その１）

（８／８）■　分数数列の和　■

◇《分数数列の和》**学力化**➡　　／　，

★演習★【４】

次の和を求めなさい。

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

【考え方】Σの計算の部分は，№６（６／８）(4) と同じタイプの問題

［答　　案］