

第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和 (その1)

(1/8) ■ 分数数列の和 ■

部分分数に分ける

★知識の整理★

【1】部分分数に分ける

$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ のような分母が整数の積の分数式は、分母の因数をそれぞれ分母とした分子が1の差の形に変形することができる。

$$\text{公式} \quad \frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

《具体例》

$$\text{I 型} \quad \frac{1}{n(n+2)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\text{ }} \end{array} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

(n+2) - n = 2

$$\leftarrow (\text{証明}) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2-n}{n(n+2)} = \frac{1}{n(n+2)}$$

$$\text{II 型} \quad \frac{1}{n(n+1)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\text{ }} \end{array} \frac{1}{1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

(n+1) - n = 1

$$\text{III 型} \quad \frac{2}{n(n+1)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\text{ }} \end{array} \frac{2}{1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

(n+1) - n = 1

$$\leftarrow (\text{証明}) \quad 2 \cdot \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$$

★

$$\text{一般型} \quad \frac{2}{(3n-1)(3n+2)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\text{ }} \end{array} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

(3n+2) - (3n-1) = 3

【注】このような式の変形を、「**部分分数に分ける**」といいます。

* 【参考】分母の因数が3個の場合

◀ No.6sで利用する。

$$(1) \quad \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\text{ }} \end{array} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

前から2つ 後から2つ
(n+2) - n = 2

$$(2) \quad \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{ }} \\ \xrightarrow{=} \\ \xrightarrow{\text{ }} \end{array} \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \right\}$$

前から2つ 後から2つ
(2n+3) - (2n-1) = 4



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和 (その1)

(2/8) ■ 分数数列の和 ■

◇ 《部分分数に分ける》 **学力化** → / ,

----- ★理解のチェック★ -----

次の分数を部分分数に分けなさい。

(1) $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2) $\frac{1}{(n+3)(n+5)}$

(3) $\frac{1}{2n(2n+2)}$

(4) $\frac{1}{(3n-2)(3n+4)}$

(5) $\frac{5}{(6n-1)(6n+5)}$

(6) $\frac{1}{(3n-1)(3n+2)(3n+5)}$

[答 案]

(1) $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$

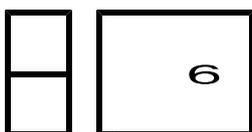
(2) $\frac{1}{(n+3)(n+5)} =$

(3) $\frac{1}{2n(2n+2)} =$

(4) $\frac{1}{(3n-2)(3n+4)} =$

(5) $\frac{5}{(6n-1)(6n+5)} =$

(6) $\frac{1}{(3n-1)(3n+2)(3n+5)} =$



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和 (その1)

(3/8) ■ 分数数列の和 ■

分数数列の和

◇ 《分数数列の和》 **学力化** → / .

★解法の技術★

次の和を求めなさい。

(1) $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

(2) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$

【考え方】 * 特殊な計算 ・分母に $\sqrt{\quad}$ を含む数列は、まず **分母の有理化** をする。
 ・分数や $\sqrt{\quad}$ を含む数列の和が Σ を使って表されているときは、**各項の和の形** に書き直す。

[答 案]

(1) **1** (一般項を部分分数に分ける)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} \quad \leftarrow \text{数列の和を}\Sigma\text{で表す}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \quad \leftarrow \text{部分分数に分けた}\rightarrow \text{No.6(1/8)を参照}$$

2 (数列の和を求める)

$$= \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{3k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{3k+2} \right) \quad \leftarrow \Sigma\text{の分配法則}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{3n-1} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n+2} \right) \right\} \quad \leftarrow \Sigma\text{を和の形へ}$$

← 一気に消える!

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) \quad \leftarrow ()\text{内の後項は-であること注意}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3n+2-2}{2(3n+2)} \quad \leftarrow ()\text{内を通分}$$

$$= \frac{n}{2(3n+2)}$$

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【いろいろな数列 No. 6 (3/8)】 - (2枚目/2枚)

➡ (前のページからのつづき)

(2) ① (分母を有理化する)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} \\ &= \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1} \end{aligned}$$

② (数列の和を求める)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) &< \text{分母を有理化} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{k+2} - \sum_{k=1}^n \sqrt{k+1} &< \Sigma \text{の分配法則} \\ &= \left(\sqrt{3+2} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \right) &< \Sigma \text{を和の形へ} \\ &\quad - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3+2} + \sqrt{5} + \dots + \sqrt{n+1} \right) \\ &= \underline{\underline{\sqrt{n+2} - \sqrt{2}}} &< \text{後項は-であること注意} \end{aligned}$$

← 一気に消える!



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和 (その1)

(4/8) ■ 分数数列の和 ■

◇ 《分数数列の和》 **学力化** → / ,

----- ★理解のチェック★ -----

次の和を求めなさい。

$$\times (1) \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

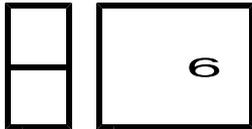
$$\times (2) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$(3) \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \cdots + \frac{1}{(n+3)(n+5)}$$

$$(4) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

【注】 ×印の問題は解く必要はありません。前問が解けなかった場合にのみ解いてください。

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和 (その1)

(5/8) ■ 分数数列の和 ■

◇ 《分数数列の和》 **学力化** → / ,

★演習★【1】

次の和を求めなさい。

× (1) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

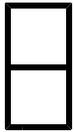
× (2) $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2n(2n+2)}$

(3) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$

(4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$

【注】 ×印の問題は解く必要はありません。前問が解けなかった場合にのみ解いてください。

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和 (その1)

(6 / 8) ■ 分数数列の和 ■

◇ 《分数数列の和》 **学力化** → / ,

★演習★【2】

次の和を求めなさい。

$$(1) \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

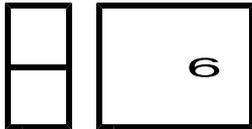
$$(2) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$$(3) \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+4)}$$

$$(4) \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

【考え方】(4) 分母の有理化をするために、いったん Σ を使って表す。

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和 (その1)

(7/8) ■ 分数数列の和 ■

◇ 《分数数列の和》 **学力化** → / ,

★演習★【3】

次の和を求めなさい。

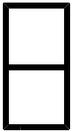
(1)
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}$$

(2)
$$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+4+\dots+n}$$

【考え方】 (1) 分母を因数分解すると、部分分数に分けることができる。

(2) 各項が数列の和で表されている場合は、まず、一般項を考える。(kで表す)次に、和をΣを使って表し、分母が連続した整数の積のとき、部分分数に分ける。

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

5 いろいろな数列の和（その1）

（8 / 8） ■ 分数数列の和 ■

◇ 《分数数列の和》 **学力化** → / ,

★演習★【4】

次の和を求めなさい。

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

【考え方】 Σ の計算の部分は、No. 6（6 / 8）（4）と同じタイプの問題

[答 案]