

第1章 数列 2・いろいろな数列

4 数列の和と一般項

(1 / 5)

数列の和と一般項

★知識の整理★

【1】数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とし、 a_n と S_n の間の関係について考えてみよう。

$$n \geq 2 \text{ のとき, } S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}$$

したがって、 $S_n - S_{n-1} = a_n$

また、 $S_1 = a_1$ であることを考えると、次のことが成り立つ。

▼ 数列の和と一般項 ▼

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき、

初項は $a_1 = S_1$

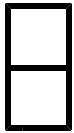
$n \geq 2$ のとき、 $a_n = S_n - S_{n-1}$

【注1】 $n \geq 2$ の条件で求めた a_n が初項についても成り立つかどうかは、 a_n の式に $n = 1$ を代入して調べる。

【注2】 第 $(n-1)$ 項までの和を求める場合には、 $n \geq 2$ という条件がつく。

$n = 1$ のときは、 $n - 1 = 1 - 1 = 0$ となり、不合理であるから。

たとえば、 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_0$ は不合理である。



第1章 数列 2・いろいろな数列

4 数列の和と一般項

(2 / 5)

◇ 《数列の和と一般項》 **学力化** → /

★解法の技術★

初項から第 n 項までの和 S_n が、次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $S_n = n^2 - 3n$

(2) $S_n = 5^n - 1$

(3) $S_n = n^3 - 2n^2 + 5$

【考え方】 (3) $n \geq 2$ における一般項が初項で成り立たないときは、 a_1 の値も並記しておく。

[答 案]

(1) $S_n = n^2 - 3n$

① (初項の値を求める)

初項は、 $a_1 = S_1$

$$= 1^2 - 3 \cdot 1$$

$$= -2 \quad \dots \textcircled{1}$$

◀ 書かないと減点

② ($n \geq 2$ のときの一般項を求める) $n \geq 2$ のとき、

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 - 3n) - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\}$$

$$= 2n - 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

◀ 書かないと減点

③ ($n = 1$ の場合も成り立つことを示す) $n = 1$ のとき、②に $n = 1$ を代入すると、

$$a_1 = 2 \cdot 1 - 4 = 2 - 4 = -2$$

となり、①と一致する。

◀ 書かないと減点

④ (答をまとめる)

よって、一般項 a_n は、 $a_n = 2n - 4$

(2) $S_n = 5^n - 1$

① (初項の値を求める)

初項は、 $a_1 = S_1$

$$= 5^1 - 1$$

$$= 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

◀ 書かないと減点

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【2・いろいろな数列 No. 5 (2/5)】 - 〈2枚目/2枚〉

→ (前のページからのつづき)

② (n ≥ 2 のときの一般項を求める)

n ≥ 2 のとき,

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= (5^n - 1) - (5^{n-1} - 1) \\
 &= 5^n - 5^{n-1} \\
 &= 5 \cdot 5^{n-1} - 1 \cdot 5^{n-1} \\
 &= (5 - 1) \cdot 5^{n-1} \\
 &= 4 \cdot 5^{n-1} \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

◀ 書かないと減点

◀ $5^n = 5^1 \times 5^{n-1}$ ◀ 5^{n-1} は共通因数

③ (n = 1 の場合も成り立つことを示す)

n = 1 のとき,

②に n = 1 を代入すると,

$$a_1 = 4 \cdot 5^{1-1} = 4 \cdot 1 = 4$$

となり, ①と一致する。

④ (答をまとめる)

よって, 一般項 a_n は, $a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$ (3) $S_n = n^3 - 2n^2 + 5$

① (初項の値を求める)

初項は, $a_1 = S_1$

$$\begin{aligned}
 &= 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \\
 &= 4 \quad \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

◀ 書かないと減点

② (n ≥ 2 のときの一般項を求める)

n ≥ 2 のとき,

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= n^3 - 2n^2 + 5 - \{(n-1)^3 - 2(n-1)^2 + 5\} \\
 &= 3n^2 - 7n + 3 \quad \dots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

◀ 書かないと減点

③ (n = 1 の場合も成り立つことを示す)

n = 1 のとき,

②に n = 1 を代入すると,

$$a_1 = 3 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 3 = -1$$

となり, ①と一致しない。

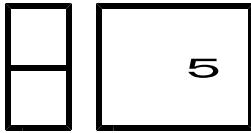
◀ 書かないと減点

④ (答をまとめる)

①, ②より,

$$a_1 = 4$$

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = 3n^2 - 7n + 3$$



第1章 数列 2・いろいろな数列

4 数列の和と一般項

(3 / 5)

◇ 《数列の和と一般項》 **学力化** → / ,

★理解のチェック★

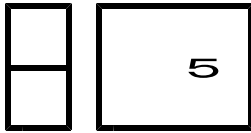
初項から第 n 項までの和 S_n が、次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $S_n = 2n^2 + 5n$

(2) $S_n = 3^n - 1$

(3) $S_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

4 数列の和と一般項

(4 / 5)

◇ 《数列の和と一般項》 **学力化** → / ,

★演習★【1】

初項から第 n 項までの和 S_n が、次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

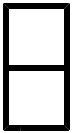
(1) $S_n = n^2$

(2) $S_n = 2^n - 1$

(3) $S_n = n^3 - 1$

(4) $S_n = n \cdot 3^{n+1} - 2$

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

4 数列の和と一般項

(5 / 5)

◇ 《数列の和と一般項》 **学力化** → / ,

★演習★【2】

初項から第 n 項までの和 S_n が、次の式で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

(1) $S_n = n^2 + 2n - 1$

(2) $S_n = 7^n - 1$

(3) $S_n = n^3 + 2n + 6$

(4) $S_n = 3^{n+1} - 2n + 1$

[答 案]