

階差数列

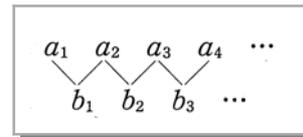
★知識の整理★

【1】階差数列とは？

数列  $\{a_n\}$  に対して、

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与えられる数列  $\{b_n\}$  を、数列  $\{a_n\}$  の **階差数列** という。

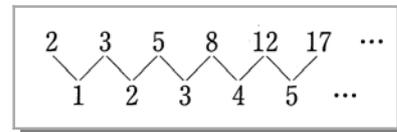


(例) 数列 2, 3, 5, 8, 12, 17, ... の階差数列

この数列の階差数列は

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

となり、初項 1, 公差 1 の等差数列である。



【2】階差数列からもとの数列の一般項を求める

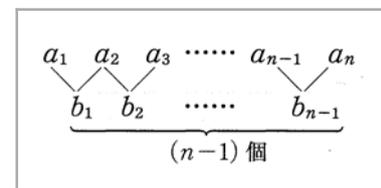
数列  $\{a_n\}$  の階差数列を数列  $\{b_n\}$  とすると、

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= b_1 \\ a_3 - a_2 &= b_2 \\ a_4 - a_3 &= b_3 \\ &\dots \\ a_n - a_{n-1} &= b_{n-1} \end{aligned}$$

これらの式の各辺をそれぞれ加えると、 $n \geq 2$  のとき、

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

よって、
$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$



\*  $n-1$  であることに注意！

植木算の原理:  $a$  の項が  $n$  個あれば  
その間は  $n-1$  個

したがって、次のことが成り立つ。

▶ 階差数列と一般項

数列  $\{a_n\}$  の階差数列を数列  $\{b_n\}$  とすると、

$$n \geq 2 \text{ のとき, } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

\*  $a = 1$  のときも成り立つかどうかは、

$a_n$  の式に  $n = 1$  を代入して与えられた  $a_1$  と等しくなるか確認する。

\*  $(n-1)$  の式では、 $n=1$  のときは  
 $n-1 = 1-1 = 0$  となるから。

2・いろいろな数列 **ナビ**

学習資料

《Σ(シグマ)》

★知識の整理★

【1】Σ(シグマ)

(1) Σの定義

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

和を表す記号

$$\sum_{k=1}^n a_k \quad a_k \dots \text{一般項}$$

▲ Σ は英語のSに相当するギリシャ文字 (Sum :和)

k = 1 … 「1番目から」

(2) Σの性質

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k \quad (c \text{ は定数})$$

(3) いろいろな和の公式

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n c = c n \quad (c \text{ は定数})$$

$$\underbrace{c + c + c + \dots + c}_{n \text{ 個}} = c n \quad \text{特に, } \sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

⑤ 初項 a, 公比 r, 項数 n の等比数列の和

$$\cdot \sum_{k=1}^n a \cdot r^{k-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad (r > 0) \quad a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\cdot \sum_{k=1}^n a \cdot r^{k-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \quad (r < 0) \quad a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$\cdot r = 1 \text{ のとき, } \sum_{k=1}^n a \cdot 1^{k-1} = n a$$

\* 【等差数列の和】 I 型 : 等差数列の和 =  $\frac{1}{2}$  × 項数 × (初項 + 末項)

II 型 : 等差数列の和 =  $\frac{1}{2}$  × 項数 × { 2 × 初項 + (項数 - 1) × 公差 }

2・いろいろな数列 **ナビ**

学習資料

《階差数列》

★知識の整理★

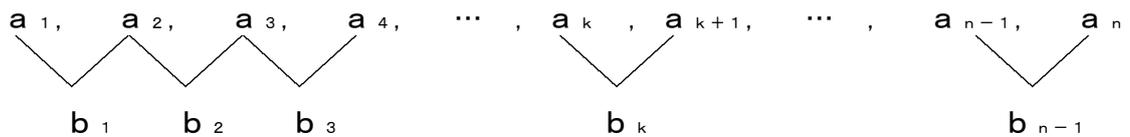
【1】階差数列

(1) 階差数列の意味

数列  $\{a_n\}$  の階差数列  $\{b_n\}$  は、

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で与えられる数列である。



◀数列  $\{a_n\}$  の項数が  $n$  のとき、階差数列  $\{b_n\}$  の項数は  $n-1$  となる。

(2) 階差数列から一般項を求める

数列  $\{a_n\}$  の初項  $a_1$  と階差数列  $\{b_n\}$  がわかると、一般項  $a_n$  がわかる。

$n \geq 2$  のとき、 $a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1})$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

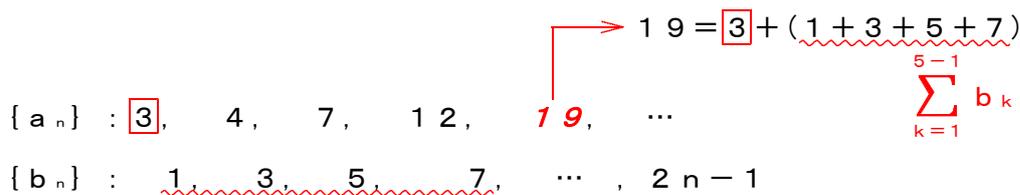
【注】  $n \geq 2$  のとき、求めた  $a_n$  に  $n=1$  を代入し、 $a_1$  と同じ値になるか必ずチェックする。

3・漸化式と数学的帰納法 **ナビ**

2020. 9. 29(火)

学習資料

《階差型漸化式》の具体例



$$\begin{aligned} a_5 &= a_1 + \sum_{k=1}^{5-1} b_k \\ &= 3 + \sum_{k=1}^{5-1} (2k-1) \\ &= 3 + 2 \sum_{k=1}^4 k - \sum_{k=1}^4 1 \\ &= 3 + 2 \times \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4+1) - 4 \\ &= 3 + 20 - 4 \\ &= 19 \end{aligned}$$



## 第1章 数列 2・いろいろな数列

## 3 階差数列

(2 / 5)

◇ 《階差数列》 **学力化** → /

## ★解法の技術★

次の数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めなさい。

(1) 2, 5, 12, 23, 38, 57, ...

(2) 2, 3, 6, 15, 42, 123, ...

【考え方】 (1), (2)とも等差数列でも等比数列でもない。このような場合は、階差数列を考えてみる。

$a = 1$  のときも成り立つかどうかは、

$a_n$  の式に  $n = 1$  を代入して与えられた  $a_1$  と等しくなるか確認する。

[考える手順]

1 階差数列を定義する

2 もとの数列の一般項を求める

3  $n = 1$  の場合を確認

4 答を書く

[答 案]

(1) 数列  $\{a_n\}$  の階差数列を  $\{b_n\}$  とする。 $\{a_n\} : 2, 5, 12, 23, 38, 57, \dots$  $\{b_n\} : 3, 7, 11, 15, 19, \dots$ 数列  $\{b_n\}$  は、初項 3, 公差 4 の等差数列であるから、

$$b_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$$

 $n \geq 2$  のとき、

◀ 書かないと減点

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

◀ 第  $(n-1)$  項までの和であることに注意

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 1)$$

植木算の原理:  $a$  の項が  $n$  個あればその間は  $n-1$  個

$$= 2 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1$$

$$= 2 + 4 \times \frac{1}{2} (n-1) \{(n-1) + 1\} - (n-1)$$

$$= 2 + 2n(n-1) - (n-1)$$

$$= 2 + 2n^2 - 2n - n + 1$$

$$= 2n^2 - 3n + 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

 $n = 1$  のとき、①に  $n = 1$  を代入すると、

$$a_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 3 = 2$$

となり、 $n = 1$  のときも成り立つ。

◀ 書かないと減点

よって、 **$a_n = 2n^2 - 3n + 3$** 

(次のページへつづく) ↗

## □ □ 【 2・いろいろな数列 No. 4 (2/5) 】 - 〈2枚目/2枚〉

➔ (前のページからのつづき)

1 階差数列を定義する

(2) 数列  $\{a_n\}$  の階差数列を  $\{b_n\}$  とする。

$$\{a_n\} : 2, 3, 6, 15, 42, 123, \dots$$

$$\{b_n\} : 1, 3, 9, 27, 81, \dots$$

数列  $\{b_n\}$  は、初項 1、公比 3 の等比数列であるから、

$$b_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

2 もとの数列の一般項を求める

 $n \geq 2$  のとき、

◀ 書かないと減点

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

◀ 第  $(n-1)$  項までの和であることに注意

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$$

植木算の原理:  $a$  の項が  $n$  個あれば  
その間は  $n-1$  個

$$= 2 + \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1}$$

◀ (初項 1, 公比 3, 項数  $n-1$ )

$$= \frac{4 + 3^{n-1} - 1}{2}$$

$$= \frac{3^{n-1} + 3}{2} \dots \textcircled{1}$$

3  $n=1$  の場合を確認 $n=1$  のとき、①に  $n=1$  を代入すると、

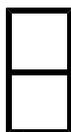
$$a_1 = \frac{3^{1-1} + 3}{2} = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

となり、 $n=1$  のときも成り立つ。

◀ 書かないと減点

4 答を書く

$$\text{よって、} \underline{\underline{a_n = \frac{3^{n-1} + 3}{2}}}$$



第1章 数列 2・いろいろな数列

**3** 階差数列

(3 / 5)

◇ 《階差数列》 **学力化** → / ,

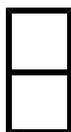
-----  
★理解のチェック★

次の数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めなさい。

(1) 2, 10, 24, 44, 70, 102, ...

(2) 5, 7, 11, 19, 35, ...

-----  
[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

**3** 階差数列

(4 / 5)

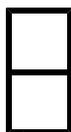
◇ 《階差数列》 **学力化** → / ,

★演習★【1】

次の数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めなさい。

- (1) 1, 3, 7, 13, 21, 31, ...
- (2) 1, 2, 5, 14, 41, 122, ...

[答 案]



第1章 数列 2・いろいろな数列

**3** 階差数列

(5 / 5)

◇ 《階差数列》 **学力化** → / ,

★演習★【2】

次の数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めなさい。

- (1) 5, 8, 9, 8, 5, 0, ...
- (2) 2, 3, 1, 5, -3, 13, ...

[答 案]