第１章　数列　２・いろいろな数列
３ 階差数列
（１／５）

階差数列

★知識の整理★

【１】階差数列とは？

数列｛ａₙ｝に対して，

$b_n = a_{n+1} - a_n$ （ｎ＝１，２，３，…）

で与えられる数列｛ｂₙ｝を，数列｛ａₙ｝の **階差数列** という。

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & \cdots \\ & b_1 & & b_2 & & b_3 & & \cdots & \end{array}$$

（例）数列　２，３，５，８，１２，１７，…の階差数列

この数列の階差数列は

１，２，３，４，５，…

となり，初項１，公差１の等差数列である。

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 2 & & 3 & & 5 & & 8 & & 12 & & 17 & & \cdots \\ & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \cdots & \end{array}$$

【２】階差数列からもとの数列の一般項を求める

数列｛ａₙ｝の階差数列を数列｛ｂₙ｝とすると，

$$\begin{aligned} \cancel{a_2} - a_1 &= b_1 \\ \cancel{a_3} - \cancel{a_2} &= b_2 \\ \cancel{a_4} - \cancel{a_3} &= b_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n - \cancel{a_{n-1}} &= b_{n-1} \end{aligned}$$

これらの式の各辺をそれぞれ加えると，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_n - a_1 = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

よって，　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & & a_2 & & a_3 & \cdots\cdots & a_{n-1} & & a_n \\ & b_1 & & b_2 & & \cdots\cdots & & b_{n-1} & \end{array}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{(n-1)\text{ 個}}$

＊ｎ－１であることに注意！

植木算の原理：aの項がn個あれば
その間はn－１個

したがって、次のことが成り立つ。

▶階差数列と一般項

数列｛ａₙ｝の階差数列を数列｛ｂₙ｝とすると，

ｎ≧２のとき，　$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

＊ａ＝１のときも成り立つかどうかは，
ａₙの式にｎ＝１を代入して与えられたａ₁と等しくなるか確認する。

＊（ｎ－１）の式では，ｎ＝１のときは
ｎ－１＝１－１＝０となるから。

２・いろいろな数列 ナビ

学習資料	《Σ（シグマ）》

★知識の整理★

【１】Σ（シグマ）

（1） Σの定義

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

和を表す記号 $\sum_{k=1}^{n} a_k$　n…「n番目まで」　a_k…一般項　k＝１…「１番目から」

▲Σは英語のSに相当するギリシャ文字　(Sum ：和)

（2） Σの性質

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$　　$\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

② $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$　（cは定数）

（3） いろいろな和の公式

① $\sum_{k=1}^{n} c = cn$　（cは定数）　$\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n個} = cn$　特に，$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

② $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$　　$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

③ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　　$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

④ $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$　　$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

⑤ 初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和

- $\sum_{k=1}^{n} a\cdot r^{k-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$　$(r>0)$　$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$
- $\sum_{k=1}^{n} a\cdot r^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$　$(r<0)$　$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$
- $r=1$ のとき，$\sum_{k=1}^{n} a\cdot 1^{k-1} = na$

＊【等差数列の和】Ⅰ型：等差数列の和＝$\frac{1}{2}$×項数×（初項＋末項）

Ⅱ型：等差数列の和＝$\frac{1}{2}$×項数×｛２×初項＋（項数－１）×公差｝

２・いろいろな数列　ナビ

学習資料	《階差数列》

★知識の整理★

【１】階差数列

(1)　階差数列の意味

数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ は，

$$b_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与えられる数列である。

$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad a_4,\quad \cdots,\quad a_k,\quad a_{k+1},\quad \cdots,\quad a_{n-1},\quad a_n$

$b_1\quad b_2\quad b_3\quad\quad b_k\quad\quad b_{n-1}$

◀数列 $\{a_n\}$ の項数が n のとき，階差数列 $\{b_n\}$ の項数は $n-1$ となる。

(2)　階差数列から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 と階差数列 $\{b_n\}$ がわかると，一般項 a_n がわかる。

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = a_1 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1})$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

【注】$n \geqq 2$ のとき，求めた a_n に $n=1$ を代入し，a_1 と同じ値になるか必ずチェックする。

３・漸化式と数学的帰納法　ナビ

2020.9.29(火)

学習資料	《階差型漸化式》の具体例

$$19 = \boxed{3} + (\underbrace{1+3+5+7}_{\sum_{k=1}^{5-1} b_k})$$

$\{a_n\}$ ：$\boxed{3}$，　4，　7，　12，　19，　…

$\{b_n\}$ ：　1，　3，　5，　7，　…，　$2n-1$

$$a_5 = a_1 + \sum_{k=1}^{5-1} b_k$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{5-1} (2k-1)$$

$$= 3 + 2\sum_{k=1}^{4} k - \sum_{k=1}^{4} 1$$

$$= 3 + 2 \times \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (4+1) - 4$$

$$= 3 + 20 - 4$$

$$= 19$$

｜メニューへ戻る｜

4

第１章　数列　２・いろいろな数列
３ 階差数列
（２／５）

◇《階差数列》 学力化 ➡　　／　　，

★解法の技術★

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。
(1)　２，５，１２，２３，３８，５７，…
(2)　２，３，６，１５，４２，１２３，…

【考え方】(1)，(2)とも等差数列でも等比数列でもない。このような場合は，階差数列を考えてみる。
$a=1$ のときも成り立つかどうかは，
a_n の式に $n=1$ を代入して与えられた a_1 と等しくなるか確認する。

[考える手順]

1 階差数列を定義する

[答　案]

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

$\{a_n\}$：２，５，１２，２３，３８，５７，…
$\{b_n\}$：　３，７，１１，１５，１９，…

数列 $\{b_n\}$ は，初項３，公差４の等差数列であるから，
$b_n=3+(n-1)\cdot 4=4n-1$

2 もとの数列の一般項を求める

$n\geqq 2$ のとき，　◀書かないと減点

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

◀第(n－1)項までの和であることに注意

植木算の原理：aの項がn個あれば その間はn－1個

$$=2+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)$$

$$=2+4\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$=2+4\times\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}-(n-1)$$

$$=2+2n(n-1)-(n-1)$$

$$=2+2n^2-2n-n+1$$

$$=2n^2-3n+3 \quad \cdots ①$$

3 n＝1の場合を確認

$n=1$ のとき，
①に $n=1$ を代入すると，
$a_1=2\cdot 1^2-3\cdot 1+3=2$
となり，$n=1$ のときも成り立つ。　◀書かないと減点

4 答を書く

よって，$a_n=2n^2-3n+3$

（次のページへつづく）↗

□ □ 【２・いろいろな数列　No.４（２／５）】 －〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

1 階差数列を定義する

(2) 数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とする。

$\{a_n\}$: ２，３，６，１５，４２，１２３，…

$\{b_n\}$: 　１，３，９，２７，８１，…

数列$\{b_n\}$は，初項１，公比３の等比数列であるから，

$b_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

2 もとの数列の一般項を求める

$n \geqq 2$のとき，　◀ 書かないと減点

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

◀ 第(n－1)項までの和であることに注意

植木算の原理：aの項がn個あれば　その間はn－1個

$$= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$$

$$= 2 + \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1}$$

◀（初項1，公比3，項数n－1）

$$= \frac{4 + 3^{n-1} - 1}{2}$$

$$= \frac{3^{n-1} + 3}{2} \quad \cdots ①$$

3 n＝1の場合を確認

$n = 1$のとき，

①に$n = 1$を代入すると，

$$a_1 = \frac{3^{1-1} + 3}{2} = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

となり，$n = 1$のときも成り立つ。　◀ 書かないと減点

4 答を書く

よって，$a_n = \dfrac{3^{n-1} + 3}{2}$

４

第１章　数列　２・いろいろな数列
３ 階差数列
（３／５）

◇《階差数列》学力化➡　／　，

★理解のチェック★

次の数列$\{a_n\}$の一般項を求めなさい。

(1)　２，１０，２４，４４，７０，１０２，…

(2)　５，７，１１，１９，３５，…

［答　案］

４

第１章　数列　２・いろいろな数列
３ 階差数列
（４／５）

◇《階差数列》**学力化**➡　　／　，

★演習★【１】

次の数列$\{a_n\}$の一般項を求めなさい。

(1)　１，３，７，１３，２１，３１，…

(2)　１，２，５，１４，４１，１２２，…

［答　　案］

第１章　数列　２・いろいろな数列
３ 階差数列
（５／５）

◇《階差数列》 **学力化**➡　　／　，

★演習★【２】

次の数列$\{a_n\}$の一般項を求めなさい。

(1)　５，８，９，８，５，０，…

(2)　２，３，１，５，－３，１３，…

［答　　案］