

等比数列の和

★知識の整理★

【1】等比数列の和(具体例)

初項2, 公比3, 項数5の等比数列の和 $S = 2 + 6 + 18 + 54 + 162$ から, 両辺を3倍したものを右のように項を1つずつずらして引くと,

$$\begin{aligned} S - 3S &= 2 - 486 \\ -2S &= -484 \\ \text{よって, } S &= 242 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} S = 2 + (6 + 18 + 54 + 162) \\ \times 3 \quad \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \quad \searrow \\ -) 3S = (6 + 18 + 54 + 162) + 486 \\ \hline -2S = 2 \qquad \qquad \qquad -486 \end{array}$$

【2】等差数列の和(一般例)

一般に, 初項 a , 公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると,

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad \dots \text{①}$$

①の両辺に公比 r を掛けて,

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad \dots \text{②}$$

①-②より,

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$$

したがって, $r \neq 0$ のとき, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

また, $r = 1$ のとき, S_n は n 個の a の和であるから,

$$S_n = a + a + a + \dots + a = na$$

*この考え方を覚えること

したがって, 次の公式が成り立つ。

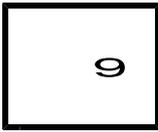
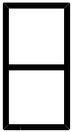
▶等比数列の和

初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和を S_n とすると,

$$r \neq 1 \text{ のとき} \\ S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad \dots \text{《基本型》} \\ \uparrow r < 1 \text{ のとき} \quad \uparrow r > 1 \text{ のとき}$$

* $r = 1$ のとき

$$S_n = na$$



第1章 数列 1・等差数列・等比数列

3 等比数列(その3)

(2/5) ■ 等比数列の和① ■

◇ 《等比数列の和①》 **学力化** → /

★解法の技術★

次の問いに答えなさい。

(1) 次のような等比数列の和 S を求めなさい。

- ① 初項 4, 公比 3, 項数 5
 ② 初項 8, 公比 $\frac{1}{2}$, 項数 6

(2) 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい。

- ① 初項 2, 公比 -3
 ② 1, 4, 16, 64, ...

[答 案]

初項を a , 公比を r , 項数を n とする。(1) ① 与えられた数列は, $a = 4$, $r = 3$, $n = 5$ の等比数列だから, その和 S は

$$S = \frac{4(3^5 - 1)}{3 - 1} = 2 \times (3^5 - 1) = 484 \quad \leftarrow r > 1$$

② 与えられた数列は, $a = 8$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 6$ の等比数列だから, その和 S は

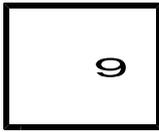
$$S = \frac{8\{1 - (\frac{1}{2})^6\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{16\{1 - (\frac{1}{2})^6\}}{2 - 1} = 16\{1 - (\frac{1}{2})^6\} = \frac{63}{4} \quad \leftarrow r < 1$$

(2) ① 与えられた数列は, $a = 2$, $r = -3$, $n = n$ の等比数列だから, その和 S_n は

$$S_n = \frac{2\{1 - (-3)^n\}}{1 - (-3)} = \frac{1 - (-3)^n}{2} \quad \leftarrow r < 1$$

② 与えられた数列は, $a = 1$, $r = 4$, $n = n$ の等比数列だから, その和 S_n は

$$S_n = \frac{1(4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3} \quad \leftarrow r > 1$$



第1章 数列 1・等差数列・等比数列

3 等比数列(その3)

(3/5) ■ 等比数列の和① ■

◇ 《等比数列の和①》 **学力化** → /

★理解のチェック★

次の問いに答えなさい。

(1) 次のような等比数列の和 S を求めなさい。

- ① 初項 3, 公比 2, 項数 5
- ② 初項 6, 公比 $\frac{1}{2}$, 項数 6
- ③ 初項 6, 公比 -2 , 項数 4

(2) 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい。

- ① 初項 3, 公比 -2
- ② 8, -4 , 2, -1 , ...

[答 案]

初項を a , 公比を r , 項数を n とする。(1) ① 与えられた数列は, $a = 3$, $r = 2$, $n = 5$ の等比数列だから, その和 S は

$$S =$$

② 与えられた数列は, $a = 6$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 6$ の等比数列だから, その和 S は

$$S =$$

③ 与えられた数列は, $a = 6$, $r = -2$, $n = 4$ の等比数列だから, その和 S は

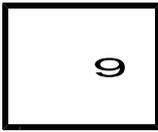
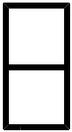
$$S =$$

(2) ① 与えられた数列は, $a = 3$, $r = -2$, $n = n$ の等比数列だから, その和 S_n は

$$S_n =$$

② 与えられた数列は, $a = 8$, $r =$ _____, $n = n$ の等比数列だから, その和 S_n は

$$S_n =$$



第1章 数列 1・等差数列・等比数列

3 等比数列(その3)

(4/5) ■ 等比数列の和① ■

◇ 《等比数列の和①》 学力化 → /

★演習★【1】

次の問いに答えなさい。

(1) 次のような等比数列の和 S を求めなさい。

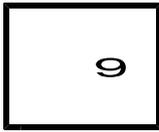
- ① 初項5, 公比3, 項数4
- ② 初項1, 公比 $\frac{1}{3}$, 項数3
- ③ 初項1, 公比-3, 項数4

(2) 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい。

- ① 初項7, 公比2
- ② 2, 6, 18, 54, ...

[答 案]

初項を a , 公比を r , 項数を n とする。(1) ① 与えられた数列は, $a=5$, $r=3$, $n=4$ の等比数列だから, その和 S は② 与えられた数列は, $a=1$, $r=\frac{1}{3}$, $n=3$ の等比数列だから, その和 S は③ 与えられた数列は, $a=1$, $r=-3$, $n=4$ の等比数列だから, その和 S は(2) ① 与えられた数列は, $a=7$, $r=2$, $n=n$ の等比数列だから, その和 S_n は② 与えられた数列は, $a=2$, $r=$, $n=n$ の等比数列だから, その和 S_n は



第1章 数列 1・等差数列・等比数列

3 等比数列(その3)

(5/5) ■ 等比数列の和① ■

◇ 《等比数列の和①》 学力化 → / ,

★演習★【2】

次の問いに答えなさい。

(1) 次のような等比数列の和 S を求めなさい。

① 初項 3, 公比 2, 項数 10

② 初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$, 項数 8③ 初項 2, 公比 -3 , 項数 6(2) 次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい。① 初項 16, 公比 $-\frac{1}{2}$ ② 1, -2 , 4, -8 , ...

[答 案]

初項を a , 公比を r , 項数を n とする。(1) ① 与えられた数列は, $a = 3$, $r = 2$, $n = 10$ の等比数列だから, その和 S は② 与えられた数列は, $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$, $n = 8$ の等比数列だから, その和 S は③ 与えられた数列は, $a = 2$, $r = -3$, $n = 6$ の等比数列だから, その和 S は(2) ① 与えられた数列は, $a = 16$, $r = -\frac{1}{2}$, $n = n$ の等比数列だから, その和 S_n は② 与えられた数列は, $a = 1$, $r = \dots\dots\dots$, $n = n$ の等比数列だから, その和 S_n は