4

第１章　数列　１・等差数列・等比数列
2 等差数列（その３）
（１／８）■　等差数列の和①　■

等差数列の和

★知識の整理★

【１】等差数列の和（具体例）

初項１，公差２，項数５の等差数列の和　Ｓ＝１＋３＋５＋７＋９　は，加える順序を逆にしても同じである。そこで，次のように，これらを項ごとに加えると，

$$\begin{array}{rl} & S=1+3+5+7+9 \\ +) & S=9+7+5+3+2 \\ \hline & 2S=10+10+10+10+10 \end{array}$$

$2S=5\times(1+9)$

$S=\frac{1}{2}\times 5\times(1+9)$

よって，Ｓ＝２５　と計算できる。

【２】等差数列の和（一般例）

一般に，初項ａ，公差ｄ，項数ｎの等差数列の末項をℓとし，初項から第ｎ項までの和をS_nとすると，

$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(\ell-d)+\ell$　　…①

①の右辺の項の順を逆にすると，

$S_n=\ell+(\ell-d)+(\ell-2d)+\cdots+(a+d)+a$　　…②

①，②を項ごとに加えると，右辺のどの項も$a+\ell$となり，それらがｎ個あるから，

$2S_n=n(a+\ell)$

よって，

$S_n=\frac{1}{2}n(a+\ell)$　　…③

③に，$\ell=a+(n-1)d$を代入すると，

$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

$S_n=\frac{1}{2}n\{a+\underbrace{a+(n-1)d}_{}\}$

初項＋第n項

したがって，次の公式が成り立つ。

▶等差数列の和

初項ａ，末項ℓ，項数ｎ　の等差数列の和をS_nとすると，

$S_n=\frac{1}{2}n(a+\ell)$　　…《Ⅰ型》

末項ℓが与えられていない場合は，
末項ℓは，公差ｄを使って$a+(n-1)d$　の形で表し，和を求めます。

$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$　　…《Ⅱ型》

｜メニューへ戻る｜

◇《等差数列の和》**学力化**➡　　／　，

★解法の技術★

次の問いに答えなさい。

(1) 次の等差数列の和を求めなさい。

① 初項８，末項２２，項数７の数列の和S_7　《Ⅰ型》

② 初項２０，公差－５，項数１３の数列の和S_{13}　《Ⅱ型》

③ 初項２，公差３，末項４７の数列の和Ｓ　《Ⅰ'型》nを求めて

④ 初項１，公差４の数列の初項から第ｎ項までの和S_n　《Ⅱ'型》項数n

(2) 等差数列９０，８４，７８，…について，第１０項から第２０項までの和を求めなさい。　《Ⅱ''型》$S_{20}-S_9$

【考え方】<u>等差数列の和の求め方</u>

＊<u>**末項ℓ**が与えられているかどうか</u>で，次の２つの求め方がある。

《Ⅰ型》初項ａ，**末項ℓ**，項数ｎが与えられたときの等差数列の和S_nは，

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+\ell)$$

◀末項ℓがあるのでⅠ型

《Ⅱ型》初項ａ，公差ｄ，項数ｎが与えられたときの等差数列の和S_nは，

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$$

◀末項ℓがないのでⅡ型

【注意】Ⅱ型は，末項ℓが与えられていないので，
末項ℓを 公差ｄを使ってａ＋(ｎ－１)ｄの形で表したもの。

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+\ell)$$

⬇

$$S_n=\frac{1}{2}n\{a+\underline{a+(n-1)d}\}$$

▲この部分が第n項，つまり末項ℓを表す。

＊<u>項数ｎが与えられていない場合</u>

初項ａ，公差ｄ，末項(第ｎ項)の数値を使い，
項数をｎとし，一般項　$a_n=a+(n-1)d=$(末項)　の形からｎを求める。

(例)　初項２，公差３，末項４７の数列の和Ｓ
項数ｎがないので，まず項数ｎを求める。
$a=2,\ d=3,\ a_n=47$なので，　◀末項ℓがあるのでⅠ型
項数をｎとすると，$a_n=2+(n-1)\times 3=47$
これを解いて，$n=16$
よって，$S_{16}=\frac{1}{2}\times 16\times(2+47)=\underline{392}$

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

□ □ 【等差数列・等比数列 No. 4 （２／８）】 ―〈２枚目／２枚〉

↗ （前のページからのつづき）

【注】答案は▶の部分を書くだけでよい。（不安な人は全部を書いてもかまいません。）

［答　案］

(1) ① $a=8$, $\ell=22$, $n=7$ なので, ◀末項 ℓ があるのでⅠ型

$S_7=\frac{1}{2}\times 7\times(8+22)=\underline{105}$

② $a=20$, $d=-5$, $n=13$ なので, ◀末項 ℓ がないのでⅡ型

$S_{13}=\frac{1}{2}\times 13\times\{2\times 20+(13-1)\times(-5)\}=\underline{-130}$

③ 項数 n がないので，まず項数 n を求める。

$a=2$, $d=3$, $a_n=47$ なので, ◀末項 ℓ があるのでⅠ型

項数を n とすると, $a_n=2+(n-1)\times 3=47$

これを解いて, $n=16$

よって, $S_{16}=\frac{1}{2}\times 16\times(2+47)=\underline{392}$

④ $a=1$, $d=4$, $n=n$ なので, ◀末項 ℓ がないのでⅡ型

$S_n=\frac{1}{2}\times n\{2\times 1+(n-1)\times 4\}=\underline{2n^2-n}$

(2) 求める和は, $S_{20}-S_9$ を計算すればよいから, ◀$-S_{10}$ でないことに注意！

$a=90$, $d=-6$, $n=20$ より, ◀末項 ℓ がないのでⅡ型

$S_{20}=\frac{1}{2}\times 20\times\{2\times 90+(20-1)\times(-6)\}=660$

$a=90$, $d=-6$, $n=9$ より, ◀末項 ℓ がないのでⅡ型

$S_9=\frac{1}{2}\times 9\times\{2\times 90+(9-1)\times(-6)\}=594$

よって, $S_{20}-S_9=660-594=\underline{66}$

｜メニューへ戻る｜

第１章　数列　１・等差数列・等比数列

２ 等差数列（その３）

（３／８）■　等差数列の和①　■

◇《等差数列の和》学力化➡　／　，

★理解のチェック★

次の問いに答えなさい。

(1) 次の等差数列の和を求めなさい。

① 初項７，末項１３，項数１０の数列の和S_{10}　《Ⅰ型》

② 初項－６，公差３，項数１２の数列の和S_{12}　《Ⅱ型》

③ 初項５，公差３，末項４４の数列の和Ｓ　《Ⅰ'型》 nを求めて

④ 初項２，公差－３の数列の初項から第ｎ項までの和S_n　《Ⅱ'型》 項数n

(2) 初項４８，公差－２の等差数列について，第２０項から第３０項までの和を求めなさい。

《Ⅱ''型》 $S_{30}-S_{20}$

［答　案］

(1) ①

◀末項 ℓ があるのでⅠ型

②

◀末項 ℓ がないのでⅡ型

③ 項数ｎがないので，まず項数ｎを求める。

◀末項 ℓ があるのでⅠ型

④

◀末項 ℓ がないのでⅡ型

(2) 求める和は，$S_{30}-S_{19}$を計算すればよいから，

◀$-S_{20}$でないことに注意！

◀末項 ℓ がないのでⅡ型

◀末項 ℓ がないのでⅡ型

｜メニューへ戻る｜

４

第１章　数列　１・等差数列・等比数列

2 等差数列（その３）

（４／８）■　等差数列の和①　■

◇《等差数列の和》**学力化**➡　　／　，　　　　Ｏｐ＿Ａ

★演習★【１】

次の問いに答えなさい。

(1) 次の等差数列の和を求めなさい。

① 初項３，末項２１，項数１０の数列の和S_{10}

② 初項１０，公差－３，項数１５の数列の和S_{15}

③ 初項３，公差４，末項７５の数列の和Ｓ

④ 初項０，公差５の数列の初項から第ｎ項までの和S_n

(2) 等差数列－９，－３，３，…について，第１１項から第２０項までの和を求めなさい。

［答　　案］

(1) ①

②

③

④

(2)

｜メニューへ戻る｜

第１章　数列　１・等差数列・等比数列

2 等差数列（その３）

（５／８）■　等差数列の和①　■

◇《等差数列の和》 **学力化**➡　　／　，　　　　　　　　　　Ｏｐ＿Ｂ

★演習★【２】

次の問いに答えなさい。

(1) 次の等差数列の和を求めなさい。

① 初項２，末項２９，項数１０の数列の和S_{10}　《Ⅰ型》

② 初項３，公差２，項数１８の数列の和S_{18}　《Ⅱ型》

③ 初項４，公差３，末項１００の数列の和Ｓ　《Ⅰ'型》nを求めて

④ 初項－４，公差－２の数列の初項から第ｎ項までの和S_n　《Ⅱ'型》項数n

(2) 初項－５３，公差４の等差数列について，第１０項から第２５項までの和を求めなさい。　《Ⅱ''型》$S_{25}-S_{10}$

［答　　案］

(1) ①

②

③

④

(2)

4

第１章　数列　１・等差数列・等比数列
2 等差数列（その３）
（６／８）■　等差数列の和①　■

項数を求めて和を求める

◇　No.４（２／８）(1) ③の特殊問題です。考え方の基本は同じです。
　与えられた数列から初項ａと公差ｄを読み取れば，No.４（２／８）(1) ③と同じ問題になります。

◇《等差数列の和①／項数を求めて》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

> 等差数列８０，７７，７４，…，１４の和Ｓを求めなさい。

【考え方】等差数列の和を求めるには，項数が必要ですが，これが問題に与えられていない場合があります。このときは，まず，項数を求めます。
項数が与えられていないの場合は，
項数をｎとし，一般項　$a_n=a+(n-1)d=$(末項）の形からｎを求めます。

［答　　案］
項数ｎがないので，まず項数ｎを求める。
$a=80$，$d=-3$，$a_n=14$ なので，　◀末項 ℓ があるのでⅠ型
項数をｎとすると，$a_n=80+(n-1)\times(-3)=14$
これを解いて，$n=23$
よって，$S_{23}=\frac{1}{2}\times23\times(80+14)=$ 1081

《参照》No.４（２／８）(1) ③タイプの問題に書きかえると，
等差数列８０，７７，７４，…，１４の和Ｓを求めなさい。　《Ⅱ’型》項数ｎ
＝「初項８０，公差－３，末項１４の数列の和Ｓを求めなさい。」
答案は同じ。

第１章　数列　１・等差数列・等比数列

２ 等差数列（その３）

（７／８）■　等差数列の和①　■

◇《等差数列の和①／項数を求めて》**学力化**➡　　／　，

★理解のチェック★

次の等差数列の和Ｓを求めなさい。

(1)　２，５，８，…，５０　　　　(2)　１００，９８，９６，…，５０

【考え方】初項ａ，公差ｄは，与えられた数列から読み取っておきます。

［答　　案］

(1)　項数ｎがないので，まず項数ｎを求める。

(2)　項数ｎがないので，まず項数ｎを求める。

4

第１章　数列　１・等差数列・等比数列

2 等差数列（その３）

（８／８）■　等差数列の和①　■

◇《等差数列の和①／項数を求めて》学力化➡　　／　，　　　　　　　　Ｏｐ＿Ａ

★演習★【３】

次の等差数列の和Ｓを求めなさい。

(1) －３，２，７，…，１０２　　　(2) ５３，４７，４１，…，－３１

［答　　案］

(1)

(2)