

等差数列の和

★知識の整理★

【1】等差数列の和(具体例)

初項1, 公差2, 項数5の等差数列の和 $S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ は, 加える順序を逆にしても同じである。そこで, 次のように, これらを項ごとに加えると,

$$2S = 5 \times (1 + 9)$$

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times (1 + 9)$$

よって, $S = 25$ と計算できる。

$$\begin{array}{r} S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\ +) S = 9 + 7 + 5 + 3 + 2 \\ \hline 2S = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 \end{array}$$

【2】等差数列の和(一般例)

一般に, 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の末項を l とし, 初項から第 n 項までの和を S_n とすると,

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (l - d) + l \quad \cdots \textcircled{1}$$

①の右辺の項の順を逆にすると,

$$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \cdots + (a + d) + a \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を項ごとに加えると, 右辺のどの項も $a + l$ となり, それらが n 個あるから,

$$2S_n = n(a + l)$$

よって,

$$S_n = \frac{1}{2} n(a + l) \quad \cdots \textcircled{3}$$

③に, $l = a + (n - 1)d$ を代入すると,

$$S_n = \frac{1}{2} n \{2a + (n - 1)d\}$$

したがって, 次の公式が成り立つ。

$$S_n = \frac{1}{2} n \{a + \underbrace{a + (n - 1)d}_{\text{初項} + \text{第}n\text{項}}\}$$

▶等差数列の和

初項 a , 末項 l , 項数 n の等差数列の和を S_n とすると,

$$S_n = \frac{1}{2} n(a + l) \quad \cdots \text{《I型》}$$

末項 l が与えられていない場合は,

末項 l は, 公差 d を使って $a + (n - 1)d$ の形で表し, 和を求めます。

$$S_n = \frac{1}{2} n \{2a + (n - 1)d\} \quad \cdots \text{《II型》}$$



第1章 数列 1・等差数列・等比数列

2 等差数列(その3)

(2/8) ■ 等差数列の和① ■

◇ 《等差数列の和》 学力化 → /

★解法の技術★

次の問いに答えなさい。

(1) 次の等差数列の和を求めなさい。

① 初項 8, 末項 22, 項数 7 の数列の和 S_7 《I 型》② 初項 20, 公差 -5, 項数 13 の数列の和 S_{13} 《II 型》③ 初項 2, 公差 3, 末項 47 の数列の和 S 《I' 型》 n を求めて④ 初項 1, 公差 4 の数列の初項から第 n 項までの和 S_n 《II' 型》 項数 n (2) 等差数列 90, 84, 78, ... について, 第 10 項から第 20 項までの和を求めなさい。 《II'' 型》 $S_{20} - S_9$

【考え方】等差数列の和の求め方

* 末項 l が与えられているかどうかで, 次の 2 つの求め方がある。《I 型》初項 a , 末項 l , 項数 n が与えられたときの等差数列の和 S_n は,

$$S_n = \frac{1}{2} n (a + l) \quad \leftarrow \text{末項 } l \text{ があるので I 型}$$

《II 型》初項 a , 公差 d , 項数 n が与えられたときの等差数列の和 S_n は,

$$S_n = \frac{1}{2} n \{2a + (n-1)d\} \quad \leftarrow \text{末項 } l \text{ がないので II 型}$$

【注意】II 型は, 末項 l が与えられていないので,末項 l を 公差 d を使って $a + (n-1)d$ の形で表したものを。

$$S_n = \frac{1}{2} n (a + \underbrace{\quad}_{l})$$

↓

$$S_n = \frac{1}{2} n \{a + \underbrace{a + (n-1)d}_{l}\}$$

▲この部分が第 n 項, つまり末項 l を表す。* 項数 n が与えられていない場合初項 a , 公差 d , 末項(第 n 項)の数値を使い,項数を n とし, 一般項 $a_n = a + (n-1)d = (\text{末項})$ の形から n を求める。(例) 初項 2, 公差 3, 末項 47 の数列の和 S 項数 n がないので, まず項数 n を求める。 $a = 2, d = 3, a_n = 47$ なので,◀末項 l があるので I 型項数を n とすると, $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 47$ これを解いて, $n = 16$

$$\text{よって, } S_{16} = \frac{1}{2} \times 16 \times (2 + 47) = \underline{392}$$

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【等差数列・等比数列 No. 4 (2/8)】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

【注】 答えは▶の部分を書くだけでよい。(不安な人は全部を書いてかまいません。)

[答 案]

(1) ① $a = 8, l = 22, n = 7$ なので, ◀末項 l があるのでI型

$$S_7 = \frac{1}{2} \times 7 \times (8 + 22) = \underline{105}$$

② $a = 20, d = -5, n = 13$ なので, ◀末項 l がないのでII型

$$S_{13} = \frac{1}{2} \times 13 \times \{2 \times 20 + (13 - 1) \times (-5)\} = \underline{-130}$$

③ 項数 n がないので, まず項数 n を求める。 $a = 2, d = 3, a_n = 47$ なので, ◀末項 l があるのでI型

$$\text{項数を } n \text{ とすると, } a_n = 2 + (n - 1) \times 3 = 47$$

これを解いて, $n = 16$

$$\text{よって, } S_{16} = \frac{1}{2} \times 16 \times (2 + 47) = \underline{392}$$

④ $a = 1, d = 4, n = n$ なので, ◀末項 l がないのでII型

$$S_n = \frac{1}{2} \times n \{2 \times 1 + (n - 1) \times 4\} = \underline{2n^2 - n}$$

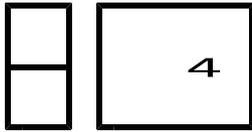
(2) 求める和は, $S_{20} - S_9$ を計算すればよいから, ◀ S_{10} でないことに注意! $a = 90, d = -6, n = 20$ より, ◀末項 l がないのでII型

$$S_{20} = \frac{1}{2} \times 20 \times \{2 \times 90 + (20 - 1) \times (-6)\} = 660$$

 $a = 90, d = -6, n = 9$ より, ◀末項 l がないのでII型

$$S_9 = \frac{1}{2} \times 9 \times \{2 \times 90 + (9 - 1) \times (-6)\} = 594$$

よって, $S_{20} - S_9 = 660 - 594 = \underline{66}$



第1章 数列 1・等差数列・等比数列

2 等差数列(その3)

(3/8) ■ 等差数列の和① ■

◇《等差数列の和》**学力化**→ /

★理解のチェック★

次の問いに答えなさい。

(1) 次の等差数列の和を求めなさい。

① 初項7, 末項13, 項数10の数列の和 S_{10} 《I型》

② 初項-6, 公差3, 項数12の数列の和 S_{12} 《II型》

③ 初項5, 公差3, 末項44の数列の和 S 《I'型》 n を求めて

④ 初項2, 公差-3の数列の初項から第 n 項までの和 S_n 《II'型》項数 n

(2) 初項48, 公差-2の等差数列について, 第20項から第30項までの和を求めなさい。

《II''型》 $S_{30} - S_{20}$

[答 案]

(1) ① ◀末項 l があるのでI型

② ◀末項 l がないのでII型

③ 項数 n がないので, まず項数 n を求める。 ◀末項 l があるのでI型

④ ◀末項 l がないのでII型

(2) 求める和は, $S_{30} - S_{19}$ を計算すればよいから, ◀ S_{20} でないことに注意!

◀末項 l がないのでII型

◀末項 l がないのでII型



第1章 数列 1・等差数列・等比数列

2 等差数列(その3)

(4/8) ■ 等差数列の和① ■

◇ 《等差数列の和》 **学力化** → / ,

Op_A

★演習★【1】

次の問いに答えなさい。

(1) 次の等差数列の和を求めなさい。

- ① 初項3, 末項21, 項数10の数列の和 S_{10}
- ② 初項10, 公差-3, 項数15の数列の和 S_{15}
- ③ 初項3, 公差4, 末項75の数列の和 S
- ④ 初項0, 公差5の数列の初項から第 n 項までの和 S_n

(2) 等差数列 $-9, -3, 3, \dots$ について, 第11項から第20項までの和を求めなさい。

[答 案]

(1) ①

②

③

④

(2)



第1章 数列 1・等差数列・等比数列

2 等差数列(その3)

(5/8) ■ 等差数列の和① ■

◇ 《等差数列の和》 **学力化** → / ,

Op_B

★演習★【2】

次の問いに答えなさい。

(1) 次の等差数列の和を求めなさい。

- ① 初項2, 末項29, 項数10の数列の和 S_{10} 《I型》
 ② 初項3, 公差2, 項数18の数列の和 S_{18} 《II型》
 ③ 初項4, 公差3, 末項100の数列の和 S 《I'型》 n を求めて
 ④ 初項-4, 公差-2の数列の初項から第 n 項までの和 S_n 《II'型》項数 n

(2) 初項-53, 公差4の等差数列について, 第10項から第25項までの和を求めなさい。 《II''型》 $S_{25} - S_{10}$

[答 案]

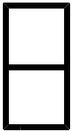
(1) ①

②

③

④

(2)



第1章 数列 1・等差数列・等比数列

2 等差数列(その3)

(6/8) ■ 等差数列の和① ■

項数を求めて和を求める

◇ No.4 (2/8) (1) ③の特殊問題です。考え方の基本は同じです。
与えられた数列から初項 a と公差 d を読み取れば、No.4 (2/8) (1) ③と同じ問題になります。

◇ 《等差数列の和①/項数を求めて》**学力化** → /

★解法の技術★

等差数列 $80, 77, 74, \dots, 14$ の和 S を求めなさい。

【考え方】等差数列の和を求めるには、項数が必要ですが、これが問題に与えられていない場合があります。このときは、まず、項数を求めます。

項数が与えられていない場合は、

項数を n とし、一般項 $a_n = a + (n - 1)d = (\text{末項})$ の形から n を求めます。

[答 案]

項数 n がないので、まず項数 n を求める。

$a = 80, d = -3, a_n = 14$ なので、

◀末項 14 があるのでI型

項数を n とすると、 $a_n = 80 + (n - 1) \times (-3) = 14$

これを解いて、 $n = 23$

よって、 $S_{23} = \frac{1}{2} \times 23 \times (80 + 14) = \underline{1081}$

《参照》No.4 (2/8) (1) ③タイプの問題に書きかえると、

等差数列 $80, 77, 74, \dots, 14$ の和 S を求めなさい。

《II'型》項数 n

= 「初項 80 、公差 -3 、末項 14 の数列の和 S を求めなさい。」

答えは同じ。



第1章 数列 1・等差数列・等比数列

2 等差数列(その3)

(7/8) ■ 等差数列の和① ■

◇《等差数列の和①/項数を求めて》**学力化**→ / ,

-----★理解のチェック★-----

次の等差数列の和Sを求めなさい。

(1) $2, 5, 8, \dots, 50$

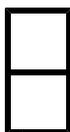
(2) $100, 98, 96, \dots, 50$

【考え方】初項 a, 公差 d は, 与えられた数列から読み取っておきます。

[答 案]

(1) 項数 n がないので, まず項数 n を求める。

(2) 項数 n がないので, まず項数 n を求める。



第1章 数列 1・等差数列・等比数列

2 等差数列(その3)

(8/8) ■ 等差数列の和① ■

◇ 《等差数列の和①/項数を求めて》 **学力化** → / ,

Op_A

★演習★【3】

次の等差数列の和Sを求めなさい。

(1) $-3, 2, 7, \dots, 102$

(2) $53, 47, 41, \dots, -31$

[答 案]

(1)

(2)