１２

第３章　図形の性質　１・三角形の性質
4 メネラウスの定理とチェバの定理（その２）
（１／５）■　チェバの定理　■

チェバの定理

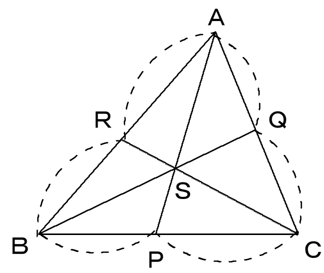
★知識の整理★

【１】チェバの定理

△ＡＢＣの３辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢ上にそれぞれ点Ｐ，Ｑ，Ｒがあり，
３直線ＡＰ，ＢＱ，ＣＲが１点で交われば

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

が成り立つ。
＊証明は学習する必要はありません。



＊チェバの定理の使い方はメネラウスの定理と全く同じです。すなわち，
★三角形の頂点→直線上の点（分点）→三角形の頂点と順に線にそって一周する。

＊《メネラウスの定理・チェバの定理を使う手順》

$$\frac{\text{頂点①分点１}}{\text{分点１頂点②}}\cdot\frac{\text{頂点②分点２}}{\text{分点２頂点③}}\cdot\frac{\text{頂点③分点３}}{\text{分点３頂点①}}=1$$

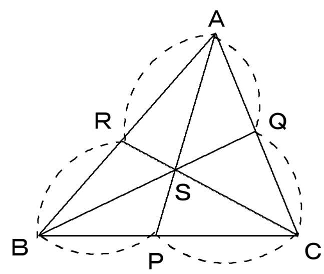
◀スタート地点と，進む方向を決めた後は一本道である。

【２】チェバの定理の逆

△ＡＢＣの３辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢ上にそれぞれ点Ｐ，Ｑ，Ｒがあり，

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

が成り立てば３直線ＡＰ，ＢＱ，ＣＲが１点で交わる。



１２

第３章　図形の性質　１・三角形の性質

4 メネラウスの定理とチェバの定理（その２）

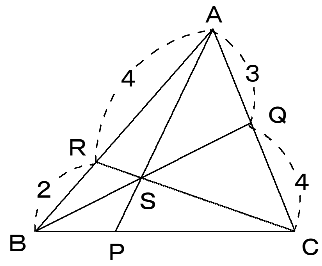
（２／５）■　チェバの定理　■

★解法の技術★

次の問いに答えなさい。

(1) 右図において，ＢＰ：ＰＣを求めなさい。

(2) 三角形の３つの中線は１点で交わることを証明しなさい。



【考え方】<u>メネラウスの定理・チェバの定理を使う手順</u>

三角形の頂点→直線上の点（分点）→三角形の頂点と順に線にそって一周する。

つまり，$\dfrac{\text{頂点①分点1}}{\text{分点1頂点②}}\cdot\dfrac{\text{頂点②分点2}}{\text{分点2頂点③}}\cdot\dfrac{\text{頂点③分点3}}{\text{分点3頂点①}}=1$

◀スタート地点と，進む方向を決めた後は一本道である。

［答　　案］

(1) 図において３直線ＡＰ，ＢＱ，ＣＲが１点で交わっているので，チェバの定理より，頂点ＡからＱへの順に一周すると，

$\dfrac{AR}{RB}\cdot\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=1$ であるから，

$\dfrac{4}{2}\cdot\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{4}{3}=1$

$\dfrac{BP}{PC}=1\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{8}$

よって，<u>ＢＰ：ＰＣ＝３：８</u>

(2) ［証明］

△ＡＢＣにおいて，辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢの中点をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒとする。

ＡＲ＝ＲＢであるから，$\dfrac{AR}{RB}=1$

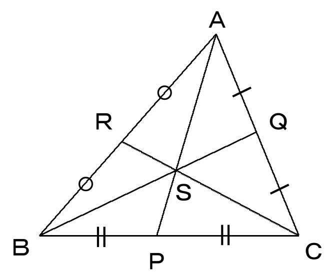
ＢＰ＝ＰＣであるから，$\dfrac{BP}{PC}=1$

ＣＱ＝ＱＡであるから，$\dfrac{CQ}{QA}=1$

$\dfrac{AR}{RB}\cdot\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}=1\cdot1\cdot1=1$

よって，チェバの定理の逆より３直線ＡＰ，ＢＱ，ＣＲは１点で交わる。

つまり，三角形の３つの中線は１点で交わる。



１２

第３章　図形の性質　１・三角形の性質

４ メネラウスの定理とチェバの定理（その２）

（３／５）■　チェバの定理　■

◇《チェバの定理》**学力化**➡　　／　，

★理解のチェック★

次の問いに答えなさい。

(1) △ＡＢＣにおいて，辺ＡＢを２：３に内分する点をＲ，辺ＡＣを５：６に内分する点をＱとし，ＢＱとＣＲの交点をＯとする。ＡＯの延長とＢＣの交点をＰとするとき，ＢＰ：ＰＣを求めなさい。

(2) △ＡＢＣの３辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢを点Ｐ，Ｑ，Ｒがそれぞれ次の比に内分するとき，３直線ＡＰ，ＢＱ，ＣＲが１点で交わるかどうか答えなさい。

① $\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{5}{6}$，$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{4}{5}$

② $\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{2}{1}$，$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{2}{3}$

【考え方】**メネラウスの定理・チェバの定理を使う手順**

三角形の頂点→直線上の点（分点）→三角形の頂点と順に線にそって一周する。

つまり，$\dfrac{\text{頂点①分点1}}{\text{分点1頂点②}}\cdot\dfrac{\text{頂点②分点2}}{\text{分点2頂点③}}\cdot\dfrac{\text{頂点③分点3}}{\text{分点3頂点①}}=1$

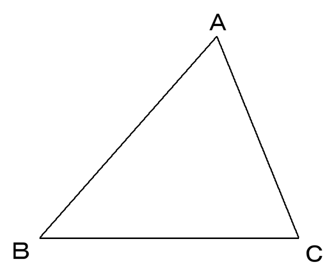
◀スタート地点と，進む方向を決めた後は一本道である。

［答　　案］

＊条件に合う図をかいて答えなさい。

(1)

《図》



（次のページへつづく）↗

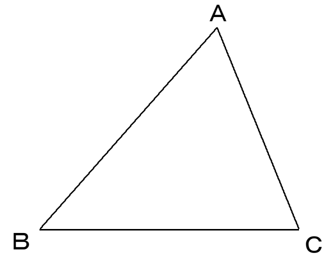
｜メニューへ戻る｜

□ □　【三角形の性質　No. １ ２（３／５）】　ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

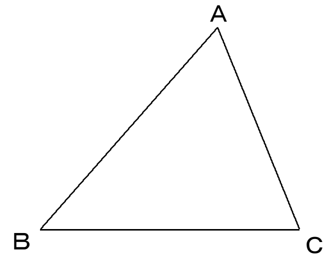
(2) ①［証明］

《図》



②［証明］

《図》



１２

第３章　図形の性質　１・三角形の性質

４ メネラウスの定理とチェバの定理（その２）

（４／５）■　チェバの定理　■

◇《チェバの定理》学力化➡　　／　，

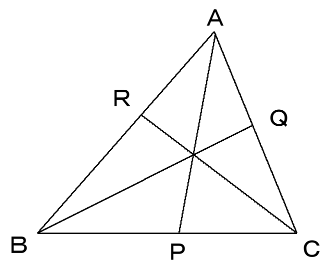
★演習★【１】

次の問いに答えなさい。

(1) 右図において，点Ｑ，Ｒがそれぞれ辺ＡＣ，ＡＢを次の比に内分するとき，点Ｐは辺ＢＣをどのような比に内分するか答えなさい。

① ＡＱ：ＱＣ＝２：３，ＡＲ：ＲＢ＝２：１

② ＡＱ：ＱＣ＝３：１，ＡＲ：ＲＢ＝３：１



(2) △ＡＢＣの内部の任意の点をＰとする。∠ＢＰＣ，∠ＣＰＡ，∠ＡＰＢの二等分線がそれぞれ辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢと交わる点をＤ，Ｅ，Ｆとする。このとき，３直線ＡＤ，ＢＥ，ＣＦは１点で交わることを証明しなさい。

【考え方】(2) 「角の二等分線と辺の比の性質」を利用する。→№.４（１／８）を参照。

［答　　案］

＊条件に合う図をかいて答えなさい。

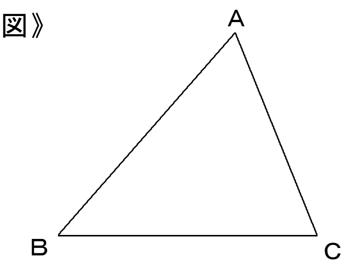
(1)

①

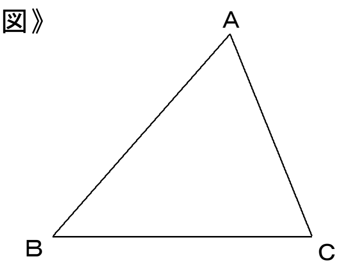
②

《図》

《図》



《図》



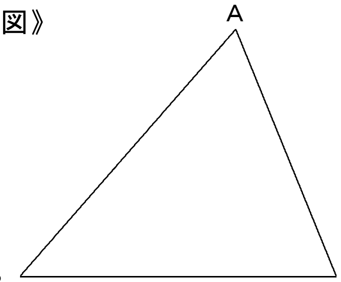
（次のページへつづく）↗

□ □　【三角形の性質　No. １２（４／５）】　ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(2) 1　△ＰＢＣにおいて，

《図》



・線分ＰＤは∠＿＿＿＿の二等分線であるから，

ＢＤ：ＤＣ＝＿＿＿：＿＿＿

よって，$\frac{BD}{DC}=\frac{[\quad]}{[\quad]}$　…①

・線分ＰＥは∠＿＿＿＿の二等分線であるから，

ＣＥ：ＥＡ＝＿＿＿：＿＿＿

よって，$\frac{CE}{EA}=\frac{[\quad]}{[\quad]}$　…②

・線分ＰＦは∠＿＿＿＿の二等分線であるから，

ＡＦ：ＦＢ＝＿＿＿：＿＿＿

よって，$\frac{AF}{FB}=\frac{[\quad]}{[\quad]}$　…③

2　①，②，③より，

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=\frac{[\quad]}{[\quad]}\cdot\frac{[\quad]}{[\quad]}\cdot\frac{[\quad]}{[\quad]}=[\quad]$$

▲真ん中の式は約分すると1となる。

したがって，チェバの定理の逆より，３直線ＡＤ，ＢＥ，ＣＦは１点で交わる。

数Ⅰ　１２

第３章　図形の性質　１・三角形の性質

４ メネラウスの定理とチェバの定理（その２）

（５／５）■　チェバの定理　■

◇《チェバの定理》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

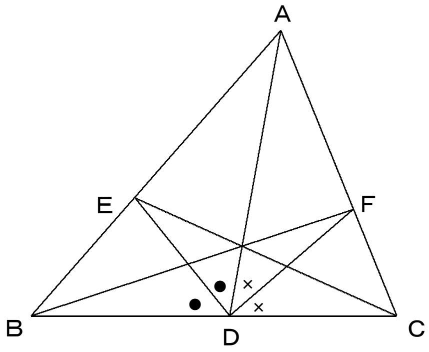
次の問いに答えなさい。

(1)　△ＡＢＣにおいて，３辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢ上にそれぞれＤ，Ｅ，Ｆをとり，ＡＤ，ＢＥ，ＣＦが１点で交わるとする。

　ＣＥ＝ＥＡ，ＢＦ＝２ＦＡであるとき，ＢＤ：ＤＣを求めなさい。

(2)　△ＡＢＣの辺ＢＣ上に点Ｄをとり，∠ＡＤＢ，∠ＡＤＣの二等分線が辺ＡＢ，ＡＣと交わる点をそれぞれＥ，Ｆとする。

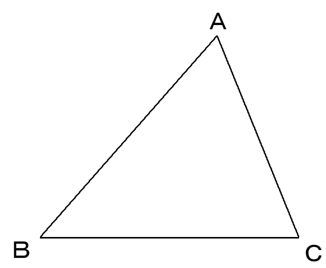
　このとき，３直線ＡＤ，ＢＦ，ＣＥは１点で交わることを証明しなさい。



［答　　案］

＊(1)　条件に合う図をかいて答えなさい。

《図》



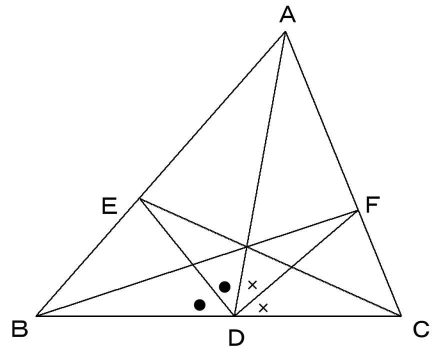
（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

□□　【三角形の性質　No.１２（５／５）】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(2) 1・△ＤＡＢにおいて,



・△ＤＣＡにおいて,

2　①，②より,

◀真ん中の式は約分すると1となる。