発展

＊１１

第３章　図形の性質　１・三角形の性質

４ メネラウスの定理とチェバの定理（その１）

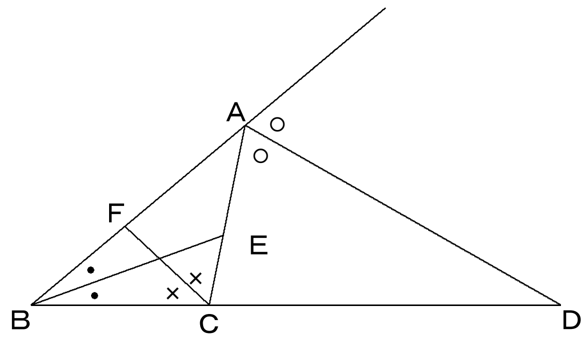
【No.１１の後で学習☆発展問題】（１／６）

メネラウスの定理の逆（証明問題）

◇《メネラウスの定理の逆（証明問題）：角の２等分線の利用》学力化➡　／　，

★解法の技術★

右の△ＡＢＣにおいて，∠Ａの外角の２等分線が辺ＢＣの延長と交わるとき，その交点をＤとする。∠Ｂ，∠Ｃの２等分線と辺ＡＣ，ＡＢの交点をそれぞれＥ，Ｆとすると，３点Ｄ，Ｅ，Ｆは１つの直線上にあることを示せ。



【考え方】結論…３点が一直線上にあること

とくに，３点が三角形の３辺(またはその延長)上にあるとき

⟹　メネラウスの定理の逆を用いる。

この問題では…

点Ｄは辺ＢＣと交わり，点Ｅは辺ＣＡと交わり，点Ｆは辺ＡＢと交わるから，

△ＡＢＣと直線ＤＥＦについて，メネラウスの定理を考える。

つまり，$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$ を示せばよい。

⟹　比の条件は与えられていないから，$\frac{AF}{FB}$，$\frac{BD}{DC}$，$\frac{CE}{EA}$ を，それぞれ式で表すことができないか考える。　→　$\boxed{1}$を参照。

［答　　案］

$\boxed{1}$（証明に必要な辺をおきかえる）　◀三角形の各辺の分点が作る辺の比の積＝１であることを示すため。

・ＢＥは∠Ｂの２等分線であるから，

$$\frac{BC}{BA}=\frac{CE}{EA}\quad\cdots①$$

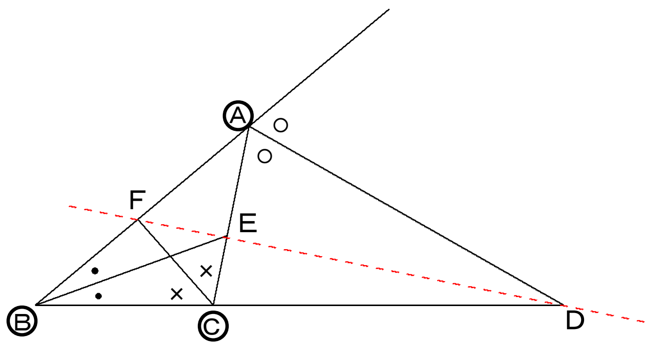
・ＣＦは∠Ｃの２等分線であるから，

$$\frac{CA}{CB}=\frac{AF}{FB}\quad\cdots②$$

・ＡＤは∠Ａの外角の２等分線であるから，

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}\quad\cdots③$$

◀三角形の外角の2等分線については，No.4（1／8）を参照



（次のページへつづく）↗

□□　【三角形の性質　No.１１s（１／６）】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

$\boxed{2}$　（メネラウスの定理がいえることを示す）

したがって，①×②×③より，

$$\frac{BC}{BA}\cdot\frac{CA}{CB}\cdot\frac{AB}{AC}=\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\quad\cdots④$$

▲頂角を挟む２辺の比　▲底辺の内分比

(④の左辺)＝１より，　　◀④の左辺を約分すると1になる。

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=1$$

これを書きかえると，　　◀メネラウスの定理の形にするため。

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$

メネラウスの定理　→　No.11（1／5）

$\boxed{3}$　（答をまとめる）

よって，メネラウスの定理の逆より，３点Ｄ，Ｅ，Ｆは１つの直線上にある。

｜メニューへ戻る｜

4 メネラウスの定理とチェバの定理（その１）

【No.１１の後で学習☆発展問題】（２／６）

◇《メネラウスの定理の逆（証明問題）：角の２等分線の利用》学力化➡　／　,

★理解のチェック★

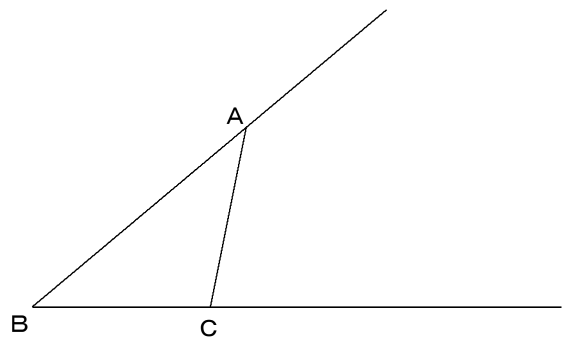
△ＡＢＣの∠Ａの外角の二等分線が辺ＢＣの延長と交わる点をＰとし，∠Ｂ，∠Ｃの二等分線がそれぞれの対辺と交わる点をＱ，Ｒとすると，３点Ｐ，Ｑ，Ｒは一直線上にあることを証明せよ。

［答　案］

1 （証明に必要な辺をおきかえる）　◀三角形の各辺の分点が作る辺の比の積＝1であることを示すため。

・ＢＱは____________であるから，　《図》

____________…①



・ＣＲは____________であるから，

____________…②

・ＡＰは__________________

であるから，

____________…③　◀三角形の外角の2等分線については，No.4（1／8）を参照

2 （メネラウスの定理がいえることを示す）

したがって，①×②×③より，

__________________________…④

▲頂角を挟む2辺の比　▲底辺の内分比

(④の左辺)＝１より，　◀④の左辺を約分すると1になる。

____

これを書きかえると，　◀メネラウスの定理の形にするために並び変える。

メネラウスの定理　⟶　No.11（1／5）

____

3 （答をまとめる）

よって，____

｜メニューへ戻る｜

4 メネラウスの定理とチェバの定理（その１）

【No.１１の後で学習☆発展問題】（３／６）

◇《メネラウスの定理の逆（証明問題）：円の接線の性質の利用》学力化➡　／　，

◇発展演習◇【１】

△ＡＢＣの内接円が辺ＢＣ，ＣＡ，ＡＢと接する点をそれぞれＡ’，Ｂ’，Ｃ’とし，２直線Ｂ’Ｃ’，ＢＣの交点，Ｃ’Ａ’，ＣＡの交点，Ａ’Ｂ’，ＡＢの交点が存在するとき，それぞれをＰ，Ｑ，Ｒとする。このとき，３点Ｐ，Ｑ，Ｒは一直線上にあることを証明せよ。

【考え方】この問題では，△ＡＢＣと直線ＰＱＲについてメネラウスの定理が成り立つことをめざす。（1，2 は，答案の書き方のサンプルです。）

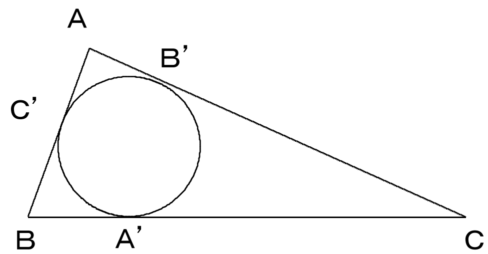
［答　　案］

1　（メネラウスの定理が成り立つ三角形と直線を利用して公式を作る）

・△ＡＢＣと直線ＰＣ’Ｂ’について，
メネラウスの定理により，

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$$

《図》



2　（証明に必要な辺をおきかえる）

Ｂ’Ａ＝ＡＣ’であるから，◀円の接線の性質

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CB'}{1}\cdot\frac{1}{C'B}=1$$ ◀約分

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CB'}{C'B}=1$$

$$\frac{C'B}{CB'}=\frac{BP}{PC} \quad \cdots①$$

＊以下，上と同じように答案を書きなさい。

・△ＡＢＣと直線＿＿＿＿について，
メネラウスの定理により，

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿であるから，◀円の接線の性質

◀約分
＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

…②
＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

・△ＡＢＣと直線＿＿＿＿について，
メネラウスの定理により，

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿であるから，◀円の接線の性質

◀約分
＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

…③
＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

□ □ 【三角形の性質 No. １ １ｓ（３／６）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

$\boxed{3}$ （メネラウスの定理がいえることを示す）

したがって，①×②×③より，

------------------------------ …④

ここで，円の接線の性質より，

------------ ＝ ------------

------------ ＝ ------------

------------ ＝ ------------

であるから，（④の左辺）＝１より，

◀④の左辺は，おきかえて約分すると1になる。下の【注】を参照

◀△ABCと直線PRについてメネラウスの定理が成り立っている。

$\boxed{4}$ （答をまとめる）

よって，--

【注】<u>④の左辺について</u>

$\dfrac{\text{C'B}}{\text{CB'}}\cdot\dfrac{\text{A'C}}{\text{AC'}}\cdot\dfrac{\text{B'A}}{\text{BA'}}$ は，おきかえると，------------------------------ ＝１

◀約分すると1となる。

発展

＊１１

第３章　図形の性質　１・三角形の性質

４　メネラウスの定理とチェバの定理（その１）

【No.１１の後で学習☆発展問題】（４／６）

◇《メネラウスの定理の逆（証明問題）：平行四辺形の性質の利用》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

平行四辺形ＡＢＣＤ内の１点Ｐを通り，各辺に平行線を引き，辺ＡＢ，ＣＤ，ＢＣ，ＤＡとの交点を，順にＱ，Ｒ，Ｓ，Ｔとする。２直線ＱＳ，ＲＴが点Ｏで交わるとき，３点Ｏ，Ａ，Ｃは１つの直線上にあることを示せ。

【考え方】目指すのは，△ＱＢＳと直線ＯＡＣについて，メネラウスの定理が成り立っていることを示すことである。（これを示すことで「メネラウスの定理の逆」より，３点Ｏ，Ａ，Ｃが１つの直線上のあることが示せるから。）

$\boxed{1}$　与えられた条件下で，メネラウスの定理が成り立つ三角形と直線を見つける。
三角形の各辺の分点が作る辺の比の積＝１とする。

三角形の３辺（またはその延長）上の３点を通る直線

$\boxed{2}$　平行四辺形の性質を使って，証明に必要な辺におきかえる。

$\boxed{3}$　メネラウスの定理の逆を適用する。

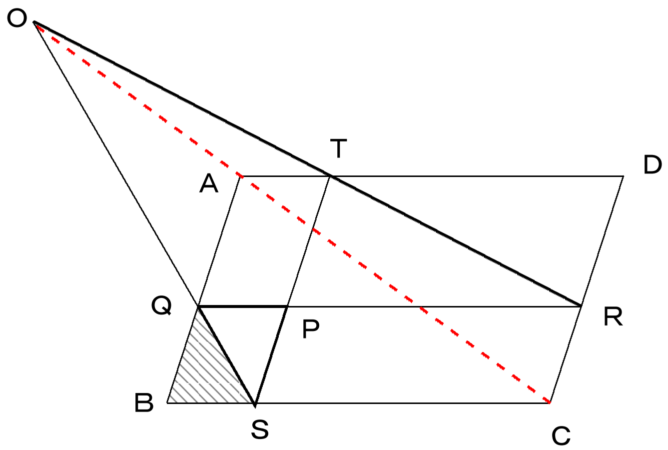
［答　　案］

$\boxed{1}$　（メネラウスの定理が成り立つ三角形と直線を利用して公式を作る）

△ＰＱＳと直線ＯＴＲについて，　◀【注意】ＯＡＣは，この段階では直線であるかどうか不明。

メネラウスの定理により，　◀重なる（共通な）分点からスタート

$$\frac{SO}{OQ}\cdot\frac{QR}{RP}\cdot\frac{PT}{TS}=1 \quad \cdots ①$$



$\boxed{2}$　（証明に必要な辺におきかえる）

平行四辺形の性質から，

ＱＲ＝ＢＣ

ＲＰ＝ＣＳ

ＰＴ＝ＱＡ

ＴＳ＝ＡＢ

であるから，これらを①に代入して

$$\frac{SO}{OQ}\cdot\frac{BC}{CS}\cdot\frac{QA}{AB}=1$$

$\boxed{3}$　（メネラウスの定理がいえることを示す）

これを書きかえると，

$$\frac{SO}{OQ}\cdot\frac{QA}{AB}\cdot\frac{BC}{CS}=1$$

◀メネラウスの定理の形にするために並び変える。

◀△ＱＢＳと直線ＯＡＣについてメネラウスの定理が成り立っている。

$\boxed{4}$　（答をまとめる）

よって，メネラウスの定理の逆より，３点Ｏ，Ａ，Ｐは１つの直線上にある。

｜メニューへ戻る｜

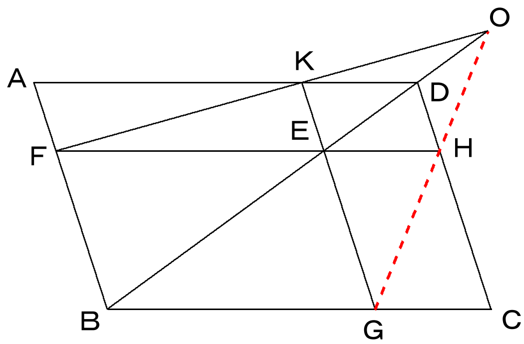
4 メネラウスの定理とチェバの定理（その１）

【No.１１の後で学習☆発展問題】（５／６）

◇《メネラウスの定理の逆（証明問題）：平行四辺形の性質の利用》学力化➡　　／　　，

★理解のチェック★

平行四辺形ＡＢＣＤの中に点Ｅをとる。点ＥからＡＤおよびＡＢに平行線を引き，ＡＢ，ＢＣ，ＣＤ，ＤＡと交わる点をそれぞれＦ，Ｇ，Ｈ，Ｋとする。ＦＫとＢＤが平行でないとし，ＦＫとＢＤの交点をＯとすると，３点Ｇ，Ｈ，Ｏは一直線上にあることを証明せよ。



【考え方】あらかじめ，証明する直線上の３つの点が，それぞれ３辺の分点となる三角形を予想しておく。この問題では，△［　　　　　］と直線［　　　　　］についてメネラウスの定理が成り立つことをめざす。

［答　　案］

1 （メネラウスの定理が成り立つ三角形と直線を利用して公式を作る）

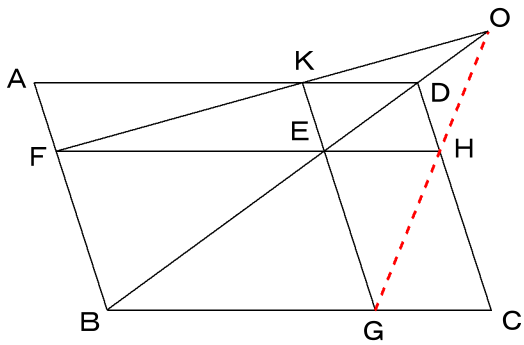
△＿＿＿と直線＿＿＿について，
メネラウスの定理により，

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿…①

◀【注意】GHOは，この段階では直線であるかどうか不明。

◀重なる（共通な）分点からスタート

《図》



2 （証明に必要な辺におきかえる）

平行四辺形の性質から，

＿＿＿＝＿＿＿

＿＿＿＝＿＿＿

＿＿＿＝＿＿＿

＿＿＿＝＿＿＿

であるから，これらを①に代入して

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

3 （メネラウスの定理がいえることを示す）

これを書きかえると，

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

◀メネラウスの定理の形にするために並び変える。

◀△BCDと直線GHOについてメネラウスの定理が成り立っている。

4 （答をまとめる）

よって，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

発展

＊１１

第３章　図形の性質　１・三角形の性質

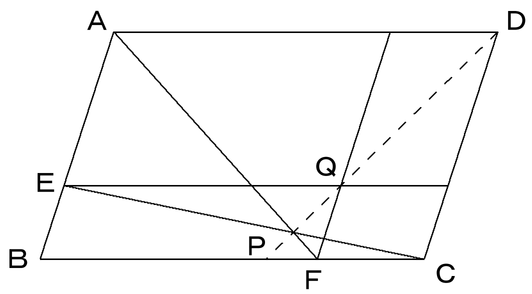
４ メネラウスの定理とチェバの定理（その１）

【No.１１の後で学習☆発展問題】（６／６）

◇《メネラウスの定理の逆（証明問題）：平行四辺形の性質の利用》**学力化**➡　／　．

◇発展演習◇【２】

平行四辺形ＡＢＣＤの辺ＡＢ，ＢＣ上の点をそれぞれＥ，Ｆとし，ＡＦ，ＣＥの交点をＰとする。Ｅを通るＡＤに平行な直線と，Ｆを通るＡＢに平行な直線の交点をＱとするとき，３点Ｐ，Ｑ，Ｄは一直線上にあることを証明せよ。



【考え方】証明する直線上の３つの点が，それぞれ３辺の分点となる三角形を探すことから始める。この問題では，<u>△［　　　　　］と直線［　　　　　］についてメネラウスの定理が成り立つ</u>ことをめざす。

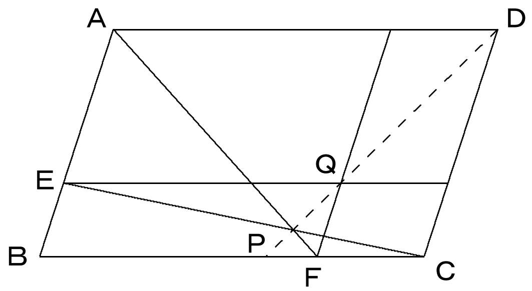
［答　　案］

1 （メネラウスの定理が成り立つ三角形と直線を利用して公式を作る）

△ＡＢＦと直線ＥＰＣについて，　　◀【注意】ＰＱＤは，この段階では直線であるかどうか不明。

メネラウスの定理により，　　◀<u>重なる（共通な）分点</u>からスタート

…①　　《図》



2 （証明に必要な辺におきかえる）

ＦＱの延長とＡＤの交点をＧとすれば，

平行四辺形の性質から，

＝

＝

＝

＝

であるから，これらを①に代入して

3 （メネラウスの定理がいえることを示す）

これを書きかえると，

◀メネラウスの定理の形にするために並び変える。

◀△ＡＦＧと直線ＰＱＤについてメネラウスの定理が成り立っている。

4 （答をまとめる）

よって，