発展 ＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理

3 三角関数の合成（その２）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（１／７）

三角関数の最大・最小②

◇《三角関数の最大・最小②》学力化➡　　／　　,

★解法の技術★

関数 $f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$ $\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{4}\pi\right)$ の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めなさい。

【考え方】$\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ を含む関数の最大・最小

半角の公式や２倍角の公式　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を利用して，$\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$ の式に直し，$r\sin(2\theta+\alpha)$ の形に変形する。
つまり，公式を使って関数の次数をさげて，2θ に統一し，その後，合成する。

＊２倍角の公式　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

＊２倍角の公式　$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ より，$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$　◀半角の公式

$\cos 2\alpha=-1+2\cos^2\alpha$ より，$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$　◀半角の公式

［答　　案］

1　角を統一すると，　◀与式の形から2倍角の公式が使えるので 2θ に統一する。

$$f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$$
$$=3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+2\sqrt{3}\sin 2\theta-\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$
$$=\underbrace{2\sqrt{3}\sin 2\theta-2\cos 2\theta}+1 \quad\cdots①$$

▲この部分だけを合成する　◀三角関数の合成の方法→プリントNo.１１（１／６）

2　①のsinとcosを合成して，　◀図を思い浮かべて…P($2\sqrt{3}$，-2)

$$f(\theta)=4\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+1 \quad\cdots②$$

◀この関数で最大値，最小値を求める

3　②の範囲を求めると，　◀置き換えたら，範囲を確認する！

$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ より

$\dfrac{\pi}{2}\leqq2\theta\leqq\dfrac{3}{2}\pi$　◀辺々×2

$\dfrac{\pi}{3}\leqq2\theta-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{4}{3}\pi$　$\cdots③$　◀辺々 $-\dfrac{\pi}{6}$

（次のページへつづく）

□ □ 【三角関数の加法定理 No. １２s（１／７）】 －〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

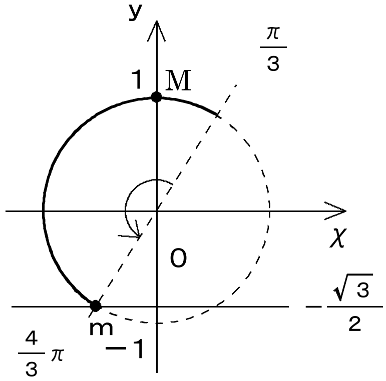
$\boxed{4}$ ③の範囲で $f(\theta)$ の最大値，最小値を求めると，

右図より，

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin(2\theta - \dfrac{\pi}{6}) \leqq 1$ ◀sin はy座標

$-2\sqrt{3} \leqq 4\sin(2\theta - \dfrac{\pi}{6}) \leqq 4$ ◀辺々×4

$1-2\sqrt{3} \leqq 4\sin(2\theta - \dfrac{\pi}{6}) + 1 \leqq 5$ …④



▲辺々＋1／ $f(\theta)$ の最小値は $1-2\sqrt{3}$，最大値は５

$\boxed{5}$ θ の値を求め，答をまとめると，

（ｉ） 関数 $f(\theta)$ が最大値５をとるから，

$4\sin(2\theta - \dfrac{\pi}{6}) + 1 = 5$ ◀②より

$\sin(2\theta - \dfrac{\pi}{6}) = 1$ ◀＋１を移項して両辺を４でわる

よって，$2\theta - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$ ◀③より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{4}{3}\pi$

これを θ について解いて，

$2\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ より，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

（ii） 関数 $f(\theta)$ が最小値 $1-2\sqrt{3}$ をとるから，

$4\sin(2\theta - \dfrac{\pi}{6}) + 1 = 1 - 2\sqrt{3}$ ◀②より

$\sin(2\theta - \dfrac{\pi}{6}) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$2\theta - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{4}{3}\pi$ ◀③より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{4}{3}\pi$

これを θ について解いて，

$2\theta = \dfrac{3}{2}\pi$ より，$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$

以上より，求める答は

$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ で，最大値５，　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ で，最小値 $1-2\sqrt{3}$

｜メニューへ戻る｜

◇《三角関数の最大・最小②》 **学力化**➡　　／　，

★理解のチェック★

次の関数の最大値と最小値，およびそのときのθの値を求めなさい。

$y=3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$　$(0\leqq\theta<2\pi)$

［答　　案］

$\boxed{1}$　角を統一すると，

◀与式の形から2倍角の公式が使えるので

２θに統一する。

…①

◀三角関数の合成の方法→プリントNo.１１（１／６）

$\boxed{2}$　①のsinとcosを合成して，

◀図を思い浮かべて…P(2，－2)

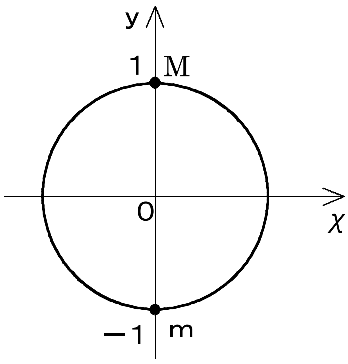
…②

◀この関数で最大値，最小値を求める

$\boxed{3}$　②の範囲を求めると，

◀置き換えたら，範囲を確認する！

…③



$\boxed{4}$　③の範囲でｙの最大値，最小値を求めると，

右図より，

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

□ □ 【三角関数の加法定理　No. １２ｓ（２／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

5　θ の値を求め，答をまとめると，

（ｉ）　関数ｙが最大値＿＿＿＿＿＿，＿＿＿＿をとるから，

（ⅱ）　関数ｙが最小値＿＿＿＿＿＿＿＿をとるから，

以上より，求める答は

｜メニューへ戻る｜

発展

＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理

３ 三角関数の合成（その２）

【№１２の後で学習☆発展問題】（３／７）

◇《三角関数の最大・最小②》 学力化➡　　／　，

◇発展演習◇【１】

次の関数の最大値と最小値，およびそのときのxの値を求めなさい。

$y=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x \quad (0\leqq x<2\pi)$

【考え方】このままでは何をしてよいかわからない。そこで，三角関数の角の大きさと種類を統一することから始める。sinだけの式になれば最大値や最小値は簡単に求まる。

［答　　案］

（書けないときは，ルーズリーフノートに続けなさい。）

発展 ＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理
３ 三角関数の合成（その２）
【No.１２の後で学習☆発展問題】（４／７）

★解法の技術★

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。$y=\sin 2\theta+2(\sin\theta+\cos\theta)$ について，
(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおいて，y を t の関数で表しなさい。
(2) t のとりうる値の範囲を求めなさい。
(3) y の最大値，最小値と，そのときの θ の値を求めなさい。

【考え方】ここでは，$\sin\theta+\cos\theta$ のように，２つ以上の三角関数をまとめて１文字におくパターンである。ただし，角は１つに統一しておく。置き換えたら範囲に注意する。
(1) $\sin\theta+\cos\theta$ から $\sin 2\theta$ を作り出すことを考える。
$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ が使えるように…。
(2) $\sin\theta+\cos\theta$ は，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ として値の範囲を求める。

［答　　案］

(1) $\boxed{1}$ （t＝sinθ＋cosθ　として，yをtで表す）

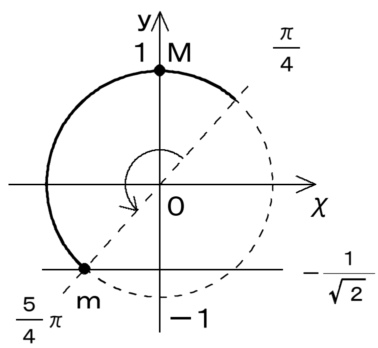
$t=\sin\theta+\cos\theta$ …① より，
$t^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2$
$t^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$t^2=1+\sin 2\theta$
したがって，$\sin 2\theta=t^2-1$ …②
①，②を与式に代入して，
$y=(t^2-1)+2t=\underline{t^2+2t-1}$

◀両辺を２乗することで，２倍角の公式が使えるようになる

◀この関数を使って最大値，最小値を求める

(2) $\boxed{2}$ （tの範囲を求める）

$t=\sin\theta+\cos\theta$ より，
$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ …③　◀sinに合成，P(1，1)
$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，　◀置き換えたら範囲を更新する！
$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5}{4}\pi$　◀辺々＋$\dfrac{\pi}{4}$
この範囲で，t（③）がとりうる値を求めると，
右図より，
$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$
$-1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$　◀辺々×$\sqrt{2}$
であるから，$\underline{-1\leqq t\leqq\sqrt{2}}$



（次のページへつづく）

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

(3) $\boxed{3}$ （yの最大値，最小値を求める）

$y = t^2 + 2t - 1$ ◀(1)より

$y = (t+1)^2 - 2 \quad (-1 \leqq t \leqq \sqrt{2})$ ◀平方完成

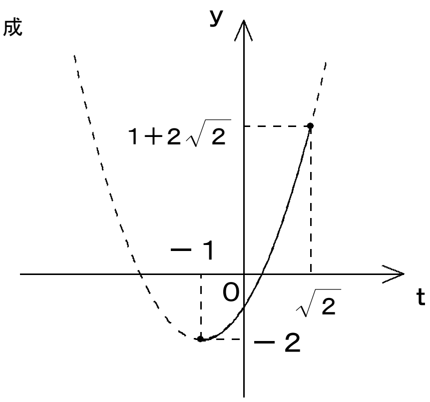
このグラフは右図のようになる。

グラフより，

$t = \sqrt{2}$ のとき，最大値　$1 + 2\sqrt{2}$

$t = -1$ のとき，最小値　-2

をとる。



$\boxed{4}$ （θ の値を求め，答をまとめる）

（ｉ）　関数 y が最大値 $1 + 2\sqrt{2}$ をとるのは，

$t = \sqrt{2}$，すなわち，$\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ のときだから，

$\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = 1$ ◀辺々 $\div\sqrt{2}$

よって，$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ◀$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi$ より

これを θ について解いて，$\theta = \frac{\pi}{4}$

（ii）　関数 y が最小値 -2 をとるのは，

$t = -1$，すなわち，$\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = -1$ のときだから，

$\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ◀辺々 $\div\sqrt{2}$

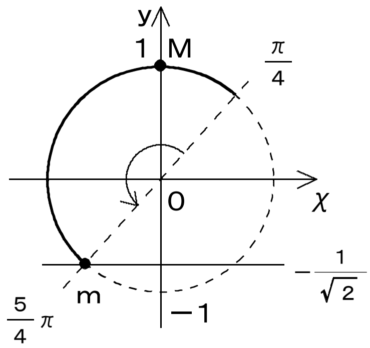
よって，$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

これを θ について解いて，$\theta = \pi$

以上より，

$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき，最大値 $1 + 2\sqrt{2}$

$\theta = \pi$ のとき，最小値 -2



｜メニューへ戻る｜

発展

＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理

３ 三角関数の合成（その２）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（５／７）

◇《三角関数の最大・最小②》 学力化➡　　／　　，

★理解のチェック★

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。$f(\theta)=2\cos\theta-\sin 2\theta-2\sin\theta+1$ について，

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t の式で表しなさい。

(2)　t のとりうる値の範囲を求めなさい。

(3)　$f(\theta)$ の最大値，最小値と，そのときの θ の値を求めなさい。

【考え方】★解法の技術★と同じ考え方で答案を書いてみましょう。

［答　　案］

(1) $\boxed{1}$　（$t=\sin\theta-\cos\theta$　として，$f(\theta)$ を t で表す）

$t=\sin\theta-\cos\theta$　…①　より，

◀両辺を2乗することで，
$\sin 2\theta$ が導ける。

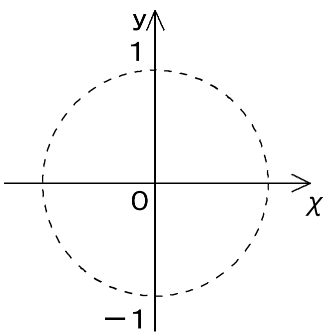
◀この関数を使って最大値，最小値を求める

(2) $\boxed{2}$　（t の範囲を求める）

$t=\sin\theta-\cos\theta$　より，

◀sinに合成，　P（1，－1）

◀置き換えたら範囲を更新する！



であるから，＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

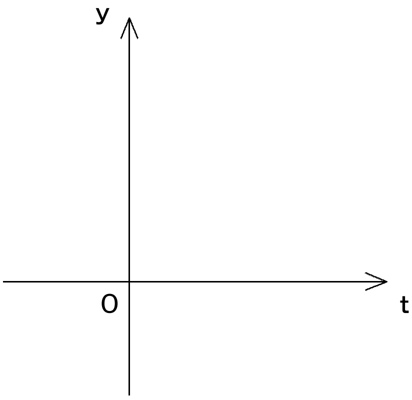
（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

□ □ 【三角関数の加法定理　No．１２ｓ（５／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(3) $\boxed{3}$ （ f（θ）の最大値，最小値を求める）



$\boxed{4}$ （θ の値を求め，答をまとめる）

（ｉ） 関数 f（θ）が最大値______をとるのは，

（ii） 関数 f（θ）が最小値______をとるのは，

以上より，

｜メニューへ戻る｜

発展

＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理

３　三角関数の合成（その２）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（６／７）

◇《三角関数の最大・最小②》 学力化➡　　／　，

◇発展演習◇【２】

関数 $y = 2\sin\chi\cos\chi - (\sin\chi + \cos\chi) + 3$ について，

(1)　$\sin\chi + \cos\chi = t$ として，y を t で表しなさい。

(2)　t のとりうる値の範囲を求めなさい。

(3)　y の最大値と最小値を求めなさい。

【考え方】θ が χ に変わっていますが，χ を θ とみなすことでまったく同じ手順で解けます。χ に条件がついていないので，最大値や最小値をとるとき，χ の値を調べる必要はありません。

［答　　案］

（書けないときは，ルーズリーフノートに続けなさい。）↗

｜メニューへ戻る｜

発展

＊１２

第３章　三角関数　２・三角関数の加法定理

3 三角関数の合成（その２）

【No.１２の後で学習☆発展問題】（７／７）

◇《三角関数の最大・最小②》 学力化➡　　／　　，

◇発展演習◇【３】

次の関数の最大値と最小値を求めなさい。

$$y=\sqrt{2}\,(\sin\chi+\cos\chi)-\sin\chi\cos\chi-1$$

【考え方】$\sin\chi+\cos\chi=t$ とおいて，y を t で表す。t の変域に注意。
前の問題と同じ手順で解けます。よく研究しながら，この問題を解きましょう。

［答　　案］

（書けないときは，ルーズリーフノートに続けなさい。）