｜メニューへ戻る｜

２０

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

2 不等式の表す領域（その７）

（１／５）■　通過領域の問題③　■

点が動く範囲

◇《点が動く範囲（逆像法）》 学力化➡　　／　，

★解法の技術★

> χ，yが $\chi^2+y^2 \leqq 8$ を満たしながら変化するとき，点P$(\chi+y,\ \chi y)$の存在範囲を図示せよ。

▼　軌跡・領域の求め方　▼

全体の流れ：求める軌跡上の点を$(X,\ Y)$と置いて，XとYの関係式を求める。

- **パターン１**：（パラメータがでてきたら）パラメータを消去する。　◀パラメータ＝媒介変数
- **パターン２**：パラメータが消去できないときは，「逆像法」を使う。　→No.１８
- **パターン３**：パラメータに変域があるときは，「１文字固定」を使う。→No.１８ｓ

【考え方】$X=\chi+y$，$Y=\chi y$とおいて，与えられた条件をX，Yで表してみる。

1 原点を中心とする半径８の円の内部または周上　⟶　$\chi^2+y^2 \leqq 8$

ここで，$\chi^2+y^2=(\chi+y)^2-2\chi y$を使うと，　◀対称式を基本対称式で表す。

$X^2-2Y \leqq 8$　すなわち　$Y \geqq \frac{1}{2}X^2-4$　◀放物線の上側の部分。

2 しかし，
$\chi^2+y^2 \leqq 8$であるから，χ，yの値には制限があり，$\chi+y=X$，$\chi y=Y$のとる値にも制限がつくはずである。その制限は **χ，yの実数条件** で，次のようになる。

［１］χ，yは２次方程式　$t^2-Xt+Y=0$　の２つの解である。

［２］χ，yは実数　$\Longleftrightarrow$　$D=X^2-4Y \geqq 0$

◀実数は和と積に関しては閉じている。

［答　　案］

1 （求める領域内の点を$(X,\ Y)$とおいて，XとYの関係式を求める）

$\chi+y=X$，$\chi y=Y$　…①とおく。　◀X，Yは一般的定数

点$(\chi,\ y)$は円$\chi^2+y^2=8$の内部または周上を動くから，

$\chi^2+y^2 \leqq 8$　より，$(\chi+y)^2-2\chi y \leqq 8$　◀$\chi^2+y^2=(\chi+y)^2-2\chi y$
（式を，パラメータ$\chi+y$，χyが使える形に変形する）

①を代入すると，$X^2-2Y \leqq 8$

すなわち，$Y \geqq \frac{1}{2}X^2-4$　…②　◀X，Yの関係式

（次のページへつづく）↗

□□　【軌跡と領域　No.２０（１／５）】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

2　（パラメータの存在条件を調べる）

ここで，χ，yは２次方程式　$t^2-Xt+Y=0$　…③　の２つの実数解であるから，
判別式をＤとすると，$D\geqq 0$

$D=(-X)^2-4\cdot 1\cdot Y=X^2-4Y$　より，$X^2-4Y\geqq 0$

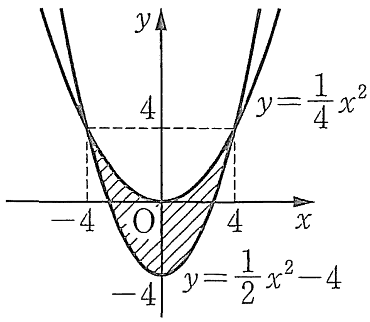
$Y\leqq\frac{1}{4}X^2$　…④　◀X，Yの関係式

3　（範囲を図示する）

②，④より，点Ｐ$(\chi+y,\ \chi y)$の存在範囲は，

$$\begin{cases} y\geqq\frac{1}{2}\chi^2-4 \\ y\leqq\frac{1}{4}\chi^2 \end{cases}$$

《求める領域》



２曲線　$y=\frac{1}{2}\chi^2-4$，$y=\frac{1}{4}\chi^2$の共有点は

$(-4,\ 4)$，$(4,\ 4)$であるから，

▲２曲線の共有点の座標→欄外計算参照

右の図の斜線部分。ただし，境界線を含む。

【注】２曲線の共有点の座標の求め方

$\frac{1}{2}\chi^2-4=\frac{1}{4}\chi^2$

$2\chi^2-16=\chi^2$

$\chi^2=16$

$\chi=\pm 4$

$\chi=-4$のとき，$y=\frac{1}{4}(-4)^2=4$，$\chi=4$のとき，$y=\frac{1}{4}(4)^2=4$

よって，

$(\chi,\ y)=(-4,\ 4)$，$(4,\ 4)$

２０

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

２　不等式の表す領域（その７）

（２／５）■　通過領域の問題③　■

◇《点が動く範囲（逆像法）》 **学力化**➡　／　，

★理解のチェック★

座標平面上で，点Ｐ（χ，ｙ）が$\chi^2 + y^2 \leqq 2$ を満たしながら動くとき，点Ｒ（χ＋ｙ，χｙ）が動く領域を図示せよ。

【考え方】$X = \chi + y$，$Y = \chi y$ とおいて，与えられた条件をX，Yで表してみる。

［答　　案］

1　（求める領域内の点を（X，Y）とおいて，XとYの関係式を求める）

$\chi + y = X$，$\chi y = Y$　…①とおく。

◀X，Yは一般的定数

◀$\chi^2 + y^2 = (\chi + y)^2 - 2\chi y$

（式を，パラメータχ＋y，χy が使える形に変形する）

◀X，Yの関係式

2　（パラメータの存在条件を調べる）

◀X，Yの関係式

3　（範囲を図示する）

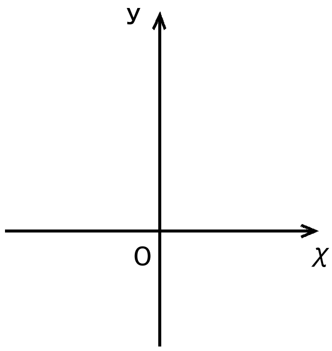
②，④より，点Ｒ（χ＋ｙ，χｙ）の存在範囲は，

２曲線の共有点の座標は，

（　　　，　　　），（　　　，　　　）であるから，

右の図の斜線部分。ただし，境界線を＿＿＿＿＿＿。

《求める領域》



★

【注】２曲線の共有点の座標の求め方

２０

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
2 不等式の表す領域（その７）
（３／５）■　通過領域の問題③　■

◇《点が動く範囲（逆像法）》 学力化➡　　／　，

★演習★【１】

点（χ，y）が原点を中心とする半径１の円の内部を動くとき，点（$\chi + y$，χy）の動く範囲を図示せよ。

【考え方】$X = \chi + y$，$Y = \chi y$ とおいて，与えられた条件を X，Y で表してみる。

［答　　案］

1 （求める領域内の点を（X，Y）とおいて，X と Y の関係式を求める）

$\chi + y = X$，$\chi y = Y$　…①とおく。

◀X，Y は一般的定数

◀$\chi^2 + y^2 = (\chi + y)^2 - 2\chi y$
（式を，パラメータ $\chi + y$，χy が使える形に変形する）

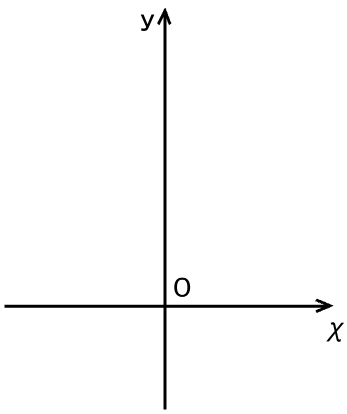
◀X，Y の関係式

2 （パラメータの存在条件を調べる）

◀X，Y の関係式

3 （範囲を図示する）

《求める領域》



②，④より，点（$\chi + y$，χy）の存在範囲は

２曲線の共有点の座標は，

（　　　　，　　　　），（　　　　，　　　　）であるから，

右の図の斜線部分。

ただし，境界線は，　　　　　　　　　　　　　　　　　　。

｜メニューへ戻る｜

２０

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

2 不等式の表す領域（その７）

（４／５）■　通過領域の問題③　■

◇《点が動く範囲（逆像法）》 学力化➡　　／　，

★演習★【２】

２次方程式$\chi^2-p\chi+q=0$の実数解をα，βとする。点（α，β）が原点を中心とする半径２の円の内部を動くとき，点Ｒ（p，q）の動く範囲を図示せよ。

【考え方】問題を，次のように読みかえると，
No.２０（２／５）★理解のチェック★とまったく同じ解き方で解ける！

★理解のチェック★　座標平面上で，点（χ，ｙ）が$\chi^2+y^2\leqq2$を満たしながら動くとき，点Ｒ（$\chi+y$，χy）が動く領域を図示せよ。

⬇　$\chi\to\alpha$，$y\to\beta$と置きかえる。
$X\to p$，$Y\to q$と置きかえる。
$\chi^2-p\chi+q=0$の実数解がα，βであるから，
$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$

★演習★【２】

座標平面上で，点（α，β）が$\alpha^2+\beta^2<2$を満たしながら動くとき，
点Ｒ（$\alpha+\beta$，$\alpha\beta$）が動く領域を図示せよ。

［答　　案］

1 （求める領域内の点を（X，Y）とおいて，XとYの関係式を求める）

$\chi^2-p\chi+q=0$の実数解がα，βであるから，２次方程式の解と係数の関係より，

$\alpha+\beta=p$，$\alpha\beta=q$　…①とおく。　◀p，qは一般的定数

◀$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

◀p，qの関係式

2 （パラメータの存在条件を調べる）

◀p，qの関係式

（次のページへつづく）↗

□ □ 【軌跡と領域　No.２０（４／５）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

3　（範囲を図示する）

②，④より，点R$(p,\ q)$の存在範囲は　　◀点R(p, q)すなわち点$(\alpha+\beta,\ \alpha\beta)$

$\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right.$

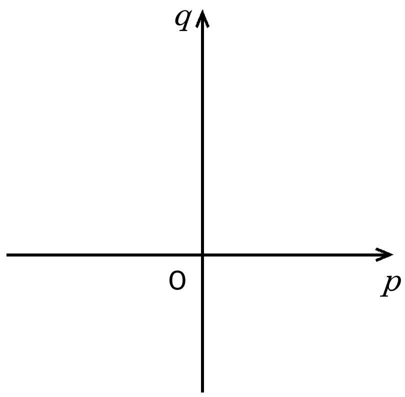
２曲線の共有点の座標は

(　　　　,　　　), (　　　　,　　　)であるから，　　◀2曲線の共有点の座標→【注】を参照

右の図の斜線部分。

ただし，境界線は，

《求める領域》



【注】グラフの交点のp座標は，

２０

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

2 不等式の表す領域（その７）

（５／５）■　通過領域の問題③　■

◇《点が動く範囲（逆像法）》 **学力化** ➡　　／　　，

★演習★【３】

$\chi^2+\chi y+y^2\leqq 3$ を満たす実数 χ，y に対して，$X=\chi+y$，$Y=\chi y$ とおくとき，点 $(X,\ Y)$ の存在する範囲を図示せよ。

【考え方】$X=\chi+y$，$Y=\chi y$ とおいて，与えられた条件を X，Y で表してみる。

［答　　案］

1 （求める領域内の点を $(X,\ Y)$ とおいて，X と Y の関係式を求める）

$\chi+y=X$，$\chi y=Y$　…①とおく。

◀ X，Y は一般的定数

◀ $\chi^2+y^2=(\chi+y)^2-2\chi y$

（式を，パラメータ $\chi+y$，χy が使える形に変形する）

◀ X，Y の関係式

2 （パラメータの存在条件を調べる）

◀ X，Y の関係式

3 （範囲を図示する）

②，④より，点 $(X,\ Y)$ の存在範囲は

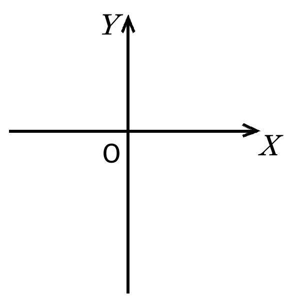
２曲線の共有点の座標は，

（　　　，　　　　），（　　　，　　　　）であるから，

右の図の斜線部分。ただし，境界線＿＿＿＿＿＿。

◀ 2曲線の共有点の座標→【注】を参照

《求める領域》



【注】グラフの交点の χ 座標は，