発展 ＊１８

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

２ 不等式の表す領域（その７）

【№.１８の後で学習☆発展問題】（１／７）

通過領域の問題（１文字固定）／№.１８の復習

◇《通過領域の問題（１文字固定）》 学力化➡　　／　　，

★解法の技術★

ｋがすべての実数をとるとき，直線 ℓ：$y=k\chi-k^2$ の通過する領域を求め，図示せよ。

【考え方】χ，ｙの２つの動きを同時に考えるのは難しいので，変数を少なくしようと考え，１文字を固定して

①　直線ℓ上のχ座標がXである点Ｐのｙ座標のとりうる範囲を考え（χを固定）

②　すべてのXについて考えて，全体の領域にする（Xを動かす）

と考えます。　◀X は一般的定数

①　直線ℓ上のχ座標がXである点Ｐのｙ座標は　$y=-k^2+Xk$

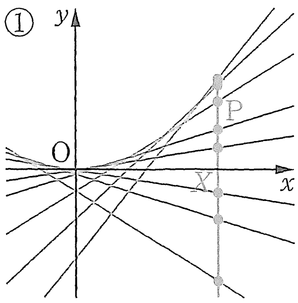
ｋがすべての実数をとるとき，ｋを変数と考えて，ｙのとりうる範囲を考えると，

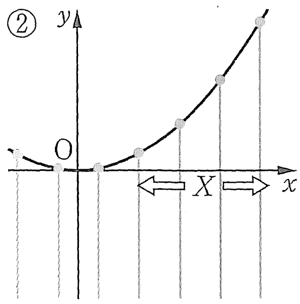
$y=-\left(k-\frac{X}{2}\right)^2+\frac{1}{4}X^2$　より，

$y\leqq\frac{1}{4}X^2$

②　すべてのXについて考えると，求める領域は，

$y\leqq\frac{1}{4}\chi^2$





［答　　案］

実数ｋが変化するときの，直線ℓ上の $\chi=X$ である点のｙ座標のとりうる値の範囲を考える。

◀まず，χ座標をXに固定してy座標の範囲を考える。（Xは一般的定数）

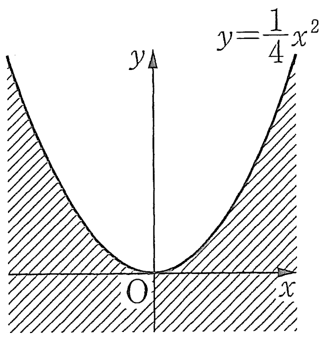
$y=-k^2+Xk=-\left(k-\frac{X}{2}\right)^2+\frac{1}{4}X^2$

よって，ｙのとりうる値の範囲は

$y\leqq\frac{1}{4}X^2$

Xを変化させることにより，

求める領域は　$y\leqq\frac{1}{4}\chi^2$　◀【注１】参照 ⬇



★

【注１】$\chi=X$のとき $y\leqq\frac{1}{4}X^2$ であるから，

すべてのXで考えると，$y\leqq\frac{1}{4}X^2$

【注２】この解き方は「ファクシミリの原理」と呼ばれることがありますが，これは”ニックネーム”ですので，試験では使ってはいけません。

発展 ＊１８

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

２ 不等式の表す領域（その７）

【№.１８の後で学習☆発展問題】（２／７）

通過領域の問題（１文字固定）

◇《通過領域の問題（１文字固定）》 学力化➡ ／ ，

★解法の技術★

χy 平面上の直線

$$y=2t\chi-t^2 \quad \cdots①$$

がある。$t\geqq 1$ を満たすすべての実数を動くときに，この直線の通過する領域を図示せよ。

▼　軌跡・領域の求め方　▼

全体の流れ：求める軌跡上の点を $(X,\ Y)$ と置いて，X と Y の関係式を求める。

・**パターン１**：（パラメータがでてきたら）パラメータを消去する。　◀パラメータ＝媒介変数
・**パターン２**：パラメータが消去できないときは，「逆像法」を使う。　→№.１８
・**パターン３**：パラメータに変域があるときは，「１文字固定」を使う。→№.１８ｓ

【考え方】今回は，「軌跡・領域の求め方」のうち，パターン３：パラメータに変域があるときの軌跡の求め方について学習します。（№.４からのつづきです。）

この問題では，
$t\geqq 1$ の範囲において t が変化するときの，直線①上の $\chi=X$ である点の
y 座標のとり得る範囲を考える。　◀X は一般的定数

［答　案］

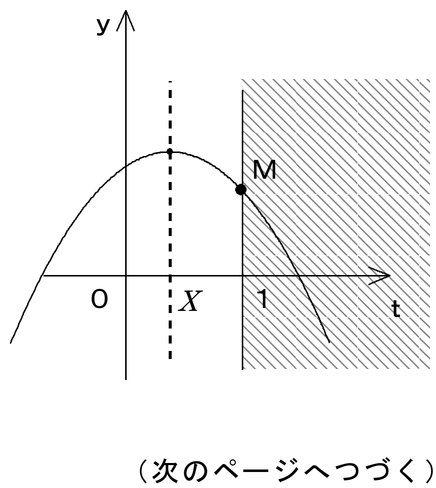
$t\geqq 1$ の範囲において t が変化するときの，直線①上の $\chi=X$ である点の y 座標のとり得る範囲を考える。　◀X は一般的定数

$$\begin{aligned} y&=2tX-t^2\\ &=-t^2+2tX\\ &=-(t^2-2Xt+X^2-X^2)\\ &=-(t-X)^2+X^2 \end{aligned}$$

（ｉ）$X\leqq 1$ のとき，
$t\geqq 1$ の範囲において
$t=1$ で最大となるから，
$y\leqq 2X-1$

X を変化させることにより，
求める領域は　$y\leqq 2\chi-1$

（ｉ）

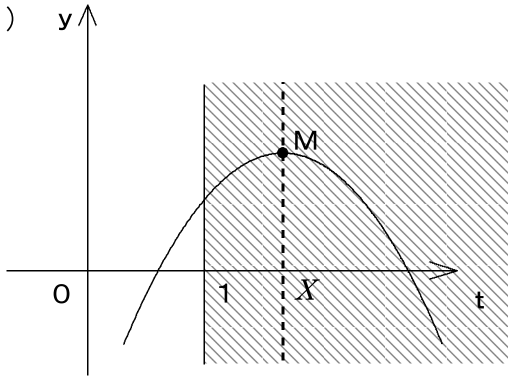


（次のページへつづく）↗

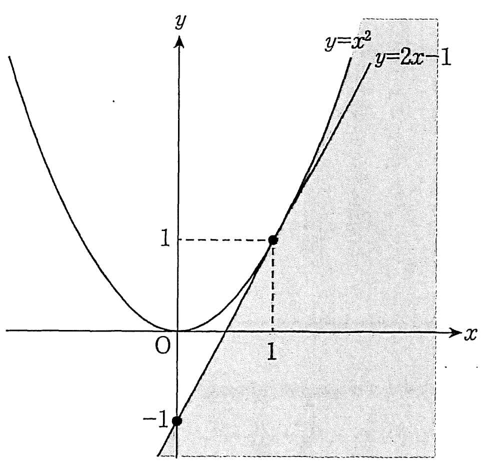
□ □ 【軌跡と領域　No.１８ｓ（２／７）】 －〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

（ⅱ）　$1 \leqq X$ のとき，
$t \geqq 1$ の範囲において
$t = X$ で最大となるから，
$y \leqq X^2$
X を変化させることにより，
求める領域は　$y \leqq \chi^2$

（ⅱ）


（ⅰ）～（ⅱ）より，求める領域は，
右図の斜線部分。ただし，境界線を含む。

《求める領域》


発展 ＊１８

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
２ 不等式の表す領域（その７）
【No.１８の後で学習☆発展問題】（３／７）

◇《通過領域の問題（１文字固定）》 学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

ａが正の実数値をとるとき，直線ｙ＝－２ａχ＋１＋a^2 …① が通る範囲を図示せよ。

【考え方】ａ＞０の範囲においてａが変化するときの，直線①上の$\chi=X$である点のｙ座標のとり得る範囲を考える。　◀Xは一般的定数

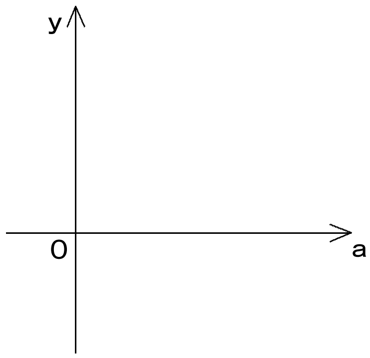
＊媒介変数に範囲があるときは，「１文字固定」を利用すると，易しく解ける。

［答　　案］

ａ＞０の範囲においてａが変化するときの，直線①上の$\chi=X$である点のｙ座標のとり得る範囲を考える。　◀Xは一般的定数

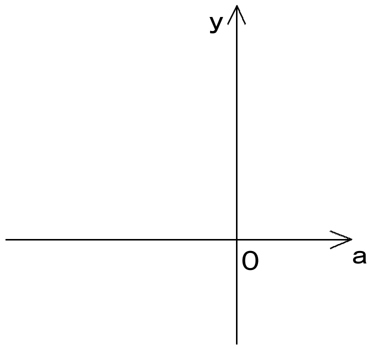
ｙ＝

（ｉ）



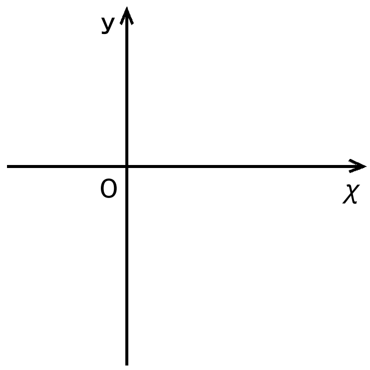
（ｉ）＿＿＿＿＿＿のとき，

（ii）



（ii）＿＿＿＿＿＿のとき，

《求める領域》



（ｉ）～（ii）より，求める領域は，

右図の斜線部分。

ただし，境界は，

発展 ＊１８

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
２ 不等式の表す領域（その７）
【№.１８の後で学習☆発展問題】（４／７）

◇《通過領域の問題（１文字固定）》 学力化➡　　／　，

◇発展演習◇【 １ 】

ｍが正の実数値をとるとき，直線 $y=m\chi-m^2$ …① が通過する範囲を図示せよ。

【考え方】ｍ＞０の範囲においてｍが変化するときの，直線①上の $\chi=X$ である点のｙ座標のとり得る範囲を考える。　◀ X は一般的定数

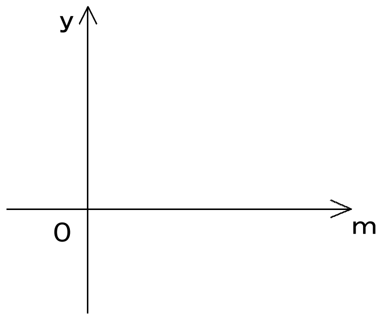
＊媒介変数に範囲があるときは，「１文字固定」を利用すると，易しく解ける。

［答　　案］

ｍ＞０の範囲においてｍが変化するときの，直線①上の $\chi=X$ である点のｙ座標のとり得る範囲を考える。　◀ X は一般的定数

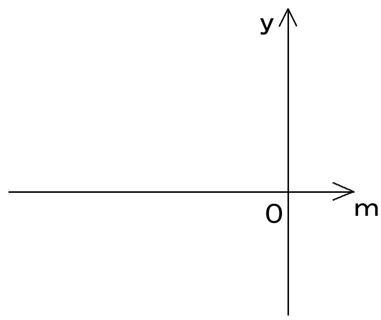
ｙ＝

（ｉ）



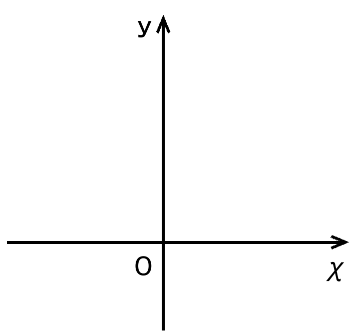
（ｉ）　　　　　　　　のとき，

（ⅱ）



（ⅱ）　　　　　　　　のとき，

《求める領域》



（ｉ）～（ⅱ）より，求める領域は，
右図の斜線部分。
ただし，境界は，

発展
＊１８

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
２ 不等式の表す領域（その７）
【№.１８の後で学習☆発展問題】（５／７）

◇《通過領域の問題（１文字固定）》 **学力化**➡　　／　，

◇発展演習◇【２】

ｐが $1 \leqq p \leqq 2$ を満たしながら変化するとき，
放物線

$y = p\chi^2 + (1 - p)\chi$　…①

の通過する範囲を図示せよ。

【考え方】 $1 \leqq p \leqq 2$ の範囲においてｐが変化するときの，直線①上の $\chi = X$ である点のｙ座標のとり得る範囲を考える。　◀ X は一般的定数

＊媒介変数に範囲があるときは，「１文字固定」を利用すると，易しく解ける。

［答　案］
$1 \leqq p \leqq 2$ の範囲においてｐが変化するときの，直線①上の $\chi = X$ である点のｙ座標のとり得る範囲を考える。　◀ X は一般的定数

ｙ＝

（ｉ）

（ｉ）＿＿＿＿＿＿のとき，

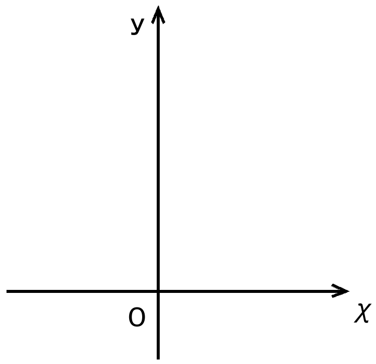
p

（ii）

（ii）＿＿＿＿＿＿のとき，

p

《求める領域》



（ｉ）～（ii）より，求める領域は，
右図の斜線部分。
ただし，境界線は

発展 ＊１８

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
２ 不等式の表す領域（その７）
【No.１８の後で学習☆発展問題】（６／７）

通過領域の問題（１文字固定）

◇《通過領域の問題（１文字固定）》 学力化 ➡　　／　　，

★解法の技術★

ｋが$-1 \leqq k \leqq 0$の範囲を動くとき，直線　$y=(2k+1)x-k^2-k$　…①の通過する領域を図示せよ。

【考え方】$-1 \leqq k \leqq 0$の範囲においてｋが変化するときの，直線①上の$x=X$である点のｙ座標のとり得る範囲を考える。　◀Xは一般的定数
＊媒介変数に範囲があるときは，「１文字固定」を利用すると，易しく解ける。

［答　　案］
$-1 \leqq k \leqq 0$の範囲においてｋが変化するときの，直線①上の$x=X$である点のｙ座標のとり得る範囲を考える。　◀Xは一般的定数

$y=(2k+1)X-k^2-k$
$=-k^2+(2X-1)k+X$
$=-\left(k-\dfrac{2X-1}{2}\right)^2+X^2+\dfrac{1}{4}$

◀２次関数の最大・最小の場合分けと同じで，「最大値と最小値を同時に求める」ときの場合分けの型

軸の方程式：$k=\dfrac{2X-1}{2}$

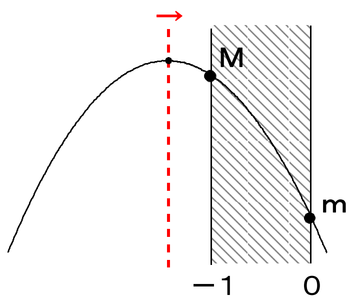
（ｉ）$\dfrac{2X-1}{2} \leqq -1$のとき，

$-1 \leqq k \leqq 0$の範囲において

・$k=-1$で最大となるから，
$y \leqq -X$
Xを変化させることにより，
求める領域は　$y \leqq -x$

・$k=0$で最小となるから，
$y \geqq X$
Xを変化させることにより，
求める領域は　$y \geqq x$

（ｉ）軸が区間の左端の外



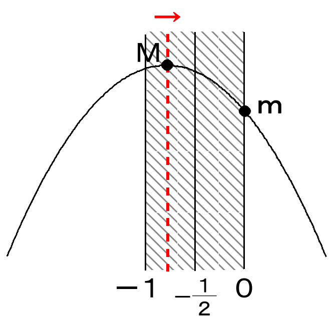
（ⅱ）$-1<\dfrac{2X-1}{2} \leqq -\dfrac{1}{2}$のとき，

$-1 \leqq k \leqq 0$の範囲において

・$k=\dfrac{2X-1}{2}$で最大となるから，

$y \leqq X^2+\dfrac{1}{4}$

（ⅱ）軸が区間の左端と中央の間



（次のページへつづく）↗

□ □ 【軌跡と領域　No.１８s（６／７）】 －〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

X を変化させることにより，

求める領域は　$y \leqq \chi^2 + \frac{1}{4}$

・ k＝０で最小となるから，

$y \geqq X$

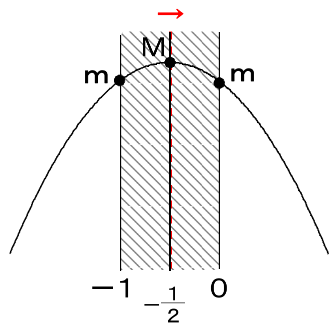
X を変化させることにより，

求める領域は　$y \geqq \chi$

（iii） $\frac{2X-1}{2} = -\frac{1}{2}$ のとき，

（ii）と同じ

（iii）軸が区間の中央と重なる



（iv） $-\frac{1}{2} < \frac{2X-1}{2} \leqq 0$ のとき，

－１≦k≦０の範囲において

・ $k = \frac{2X-1}{2}$ で最大となるから，

$y \leqq X^2 + \frac{1}{4}$

X を変化させることにより，

求める領域は　$y \leqq \chi^2 + \frac{1}{4}$

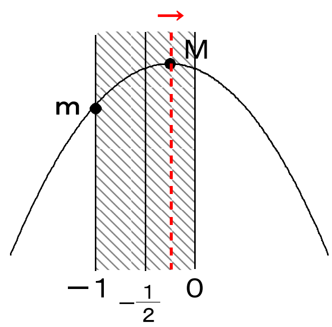
・ k＝－１で最小となるから，

$y \geqq -X$

X を変化させることにより，

求める領域は　$y \geqq -\chi$

（iv）軸が区間の中央と右端の間



（V） $0 < \frac{2X-1}{2}$ のとき，

－１≦k≦０の範囲において

・ k＝０で最大となるから，

$y \leqq X$

X を変化させることにより，

求める領域は　$y \leqq \chi$

・ k＝－１で最小となるから，

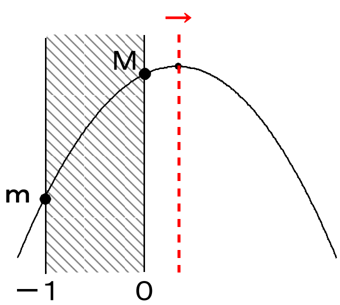
$y \geqq -X$

X を変化させることにより，

求める領域は　$y \geqq -\chi$

★

（V）軸が区間の右端の外



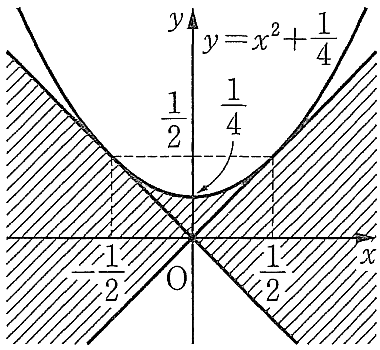
（次のページへつづく）↗

□ □ 【軌跡と領域　No. １８s（６／７）】 ー〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

（ⅰ）～（Ⅴ）より，求める領域は，
右図の斜線部分。ただし，境界線を含む。

《求める領域》



｜メニューへ戻る｜

発展 ＊１８

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

2 不等式の表す領域（その７）

【No.１８の後で学習☆発展問題】（７／７）

◇《通過領域の問題（１文字固定）》 **学力化**➡　　／　，

----★理解のチェック★----

ｔは実数とする。直線　$y=-2t\chi+t^2+1$　…①について，

(1)　ｔが実数全体を変化するとき，直線①の通過する領域を図示せよ。（逆像法で）

(2)　ｔが不等式　$|t|<1$　を満たしながら変化するとき，直線①の通過する領域を図示せよ。
（「１文字固定」を利用して）

【考え方】(1)　$\boxed{1}$　求める領域内の点を$(X,\ Y)$とおいて，XとYの関係式を求める。

$\boxed{2}$　パラメータｔが存在するための条件を調べる。

(2)　$|t|<1$　の範囲においてｔが変化するときの，直線①上の$\chi=X$である点のｙ座標のとり得る範囲を考える。　◀Xは一般的定数

$|t|<1$　は，$-1<\chi<1$として使う。

＊媒介変数に範囲があるときは，「１文字固定」を利用すると，易しく解ける。

［答　　案］

(1)

$\boxed{1}$　（求める領域内の点を$(X,\ Y)$とおいて，XとYの関係式を求める）

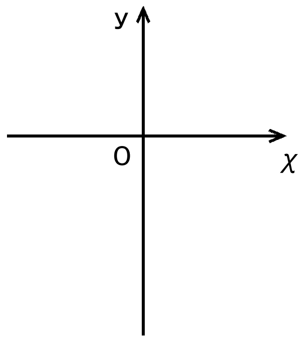
直線①が求める領域内の点$(X,\ Y)$を通るとすると，　◀X，Yは一般的定数

◀ｔが存在するための条件を調べるため。

$\boxed{2}$　（パラメータの存在条件を調べる）

◀X，Yの関係式

《求める領域》



$\boxed{3}$　（領域を求める）

したがって，求める領域は ＿＿＿＿＿＿＿＿ であり，

右図の斜線部分。ただし，境界線を

（次のページへつづく）↗

□ □ 【軌跡と領域　No. １８s（７／７）】 ー〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

(2)

｜t｜<１ の範囲において t が変化するときの，直線①上の $\chi = X$ である点の y 座標のとり得る範囲を考える。

◀ X は一般的定数

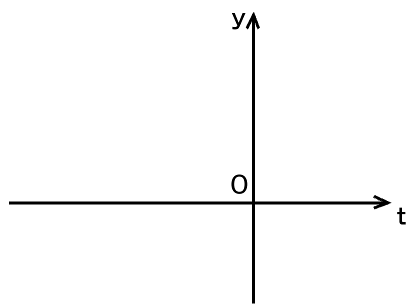
$Y =$

◀2次関数の最大・最小の場合分けと同じで，「最大値と最小値を同時に求める」ときの場合分けの型

軸の方程式：

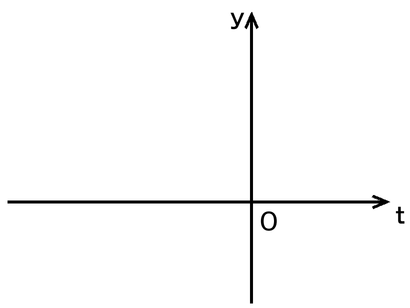
（ i ）　　　　　　　　のとき，

（ i ）軸が区間の左端の外



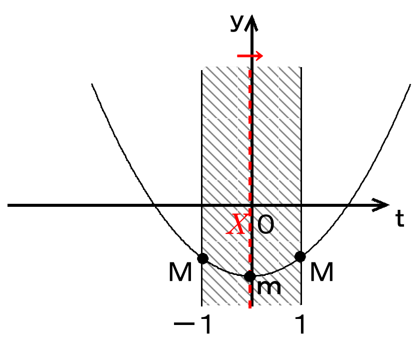
（ ii ）軸が区間の左端と中央の間

（ ii ）　　　　　　　　のとき，



（iii）軸が区間の中央と重なる

（iii）　$X = 0$ のとき，
（ ii ）と同じ



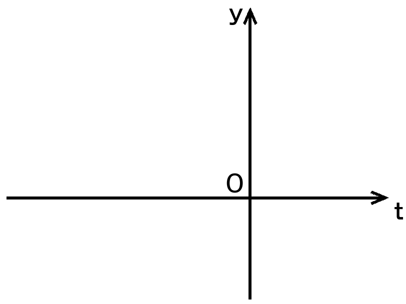
（次のページへつづく）↗

□ □ 【軌跡と領域 No.１８s（７／７）】 ー〈３枚目／３枚〉

（前のページからのつづき）

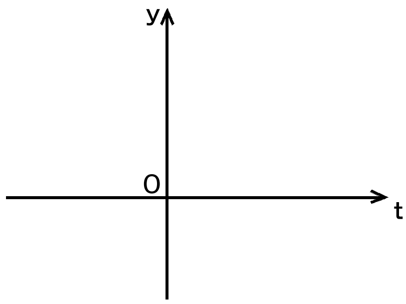
（ⅳ） ＿＿＿＿＿＿＿＿のとき，

（ⅳ）<u>軸が区間の中央と右端の間</u>



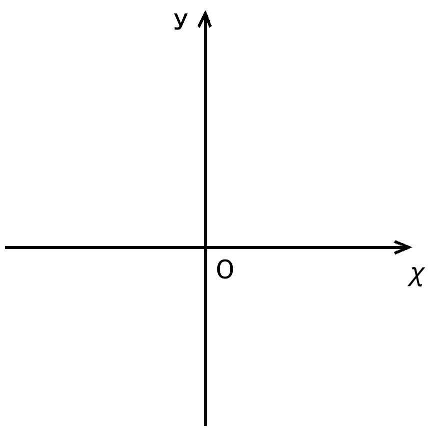
（Ⅴ）<u>軸が区間の右端の外</u>

（Ⅴ） ＿＿＿＿＿＿のとき，



★

《求める領域》



（ｉ）～（Ⅴ）より，求める領域は，右図の斜線部分。
ただし，境界線は，