｜メニューへ戻る｜

直線の通過領域

◇《直線の通過領域（逆像法）》 学力化➡　　／　，

★解法の技術★

ｋがすべての実数をとるとき，直線 ℓ：ｙ＝ｋχ－ｋ² の通過する領域を求め，図示せよ。

▼　軌跡・領域の求め方　▼

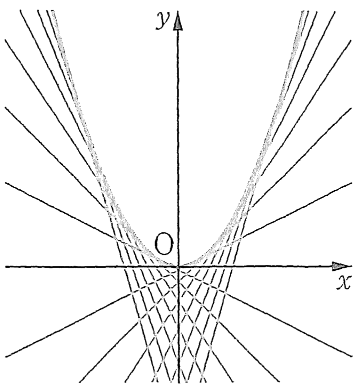
全体の流れ：求める軌跡上の点を（X，Y）と置いて，XとYの関係式を求める。

・**パターン１**：（パラメータがでてきたら）パラメータを消去する。　◀パラメータ＝媒介変数
・**パターン２**：パラメータが消去できないときは，「逆像法」を使う。　→№．１８
・**パターン３**：パラメータに変域があるときは，「１文字固定」を使う。→№．１８ｓ

【考え方】今回は，「軌跡・領域の求め方」のうち，**パターン２**：パラメータが消去できない場合の軌跡の求め方について学習します。（№．４からのつづきです。）

逆像法について

問題文の直線 ℓ：ｙ＝ｋχ－ｋ² の
ｋに具体的な値を代入してみると，
ｋ＝１のとき，ｙ＝χ－１
ｋ＝０のとき，ｙ＝０
ｋ＝－２のとき，ｙ＝－２χ－４
ｋ＝$\frac{1}{2}$ のとき，ｙ＝$\frac{1}{2}$χ－$\frac{1}{4}$
…
となりますが，これらをもとにｋがすべての実数をとるときの全体像をつかむのは難しそうです。



★

上の考え方を整理すると，
・「ｋの値を１つ決める → それに伴って直線ℓが決まる → そのときに通る点が分かる」
　となりますが，これでは，すべての実数ｋについて調べるのは難しそうです。

（次のページへつづく）

□ □　【軌跡と領域　No. １８（１／７）】　－〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

・そこで，「見方を変えて」
点の座標を１つと定めて，その点を通るような直線ℓ（定数ｋの値）が存在するか？
と考えます。例えば，

点（１，０）を通るか？ ⇒ ℓに代入すると，$0 = k - k^2$ より，
$k = 0,\ 1$（実数ｋが存在する） ⇒ 点（１，０）を通る。
点（０，１）を通るか？ ⇒ ℓに代入すると，$1 = -k^2$ より，
$k = \pm i$（実数ｋは存在しない）⇒点（０，１）は通らない。

このことから，一般的に考えて，
「直線ℓが点（X，Y）を通る → ℓに代入した方程式を満たす実数ｋが存在する」
となるから，実数ｋの存在条件を考えます。

【注】この考え方は **逆像法** と呼ばれることがあります。

［答　案］

1　（求める領域内の点を（X，Y）とおいて，XとYの関係式を求める）

直線ℓが求める領域内の点（X，Y）を通るとすると，
$Y = Xk - k^2$　であり，
これをｋについて整理すると，
$k^2 - Xk + Y = 0$　…①

◀X，Yは一般的定数

◀ｋが存在するための条件を調べるため。

2　（パラメータの存在条件を調べる）

①を満たす実数ｋが存在するから，判別式をＤとすると，$D \geqq 0$
$D = X^2 - 4Y$ より，$X^2 - 4Y \geqq 0$

$$Y \leqq \frac{1}{4}X^2$$

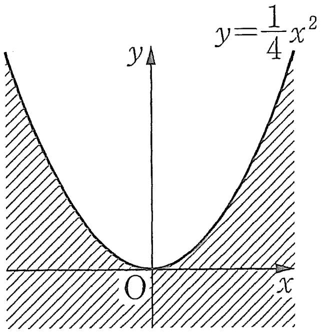
◀X，Yの関係式

3　（領域を求める）

したがって，求める領域は $y \leqq \dfrac{1}{4}x^2$ であり，
下図の斜線部分。ただし，境界線を含む。

◀X，Yをx，yに戻す。
（X，Yは一般的定数であるから。
あるいは問題に与えられていないから。）

《求める領域》



（次のページへつづく）↗

□ □　【軌跡と領域　No.１８（１／７）】　ー〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

◇　前問の別解　◇

◇《直線の通過領域（１文字固定）》 学力化➡　　／　，

★解法の技術★

kがすべての実数をとるとき，直線 ℓ：y＝kχ－k² の通過する領域を求め，図示せよ。

【考え方】χ，yの２つの動きを同時に考えるのは難しいので，変数を少なくしようと考え，１文字を固定して

① 直線ℓ上のχ座標がXである点Pのy座標のとりうる範囲を考え（χを固定）

② すべてのXについて考えて，全体の領域にする（Xを動かす）

と考えます。　◀X は一般的定数

① 直線ℓ上のχ座標がXである点Pのy座標は　$y=-k^2+Xk$

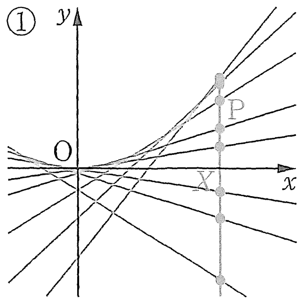
kがすべての実数をとるとき，kを変数と考えて，yのとりうる範囲を考えると，

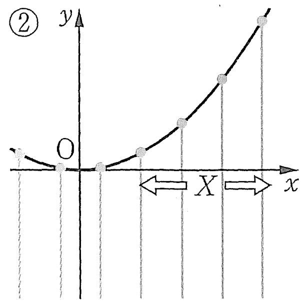
$y=-\left(k-\frac{X}{2}\right)^2+\frac{1}{4}X^2$　より，

$y\leqq\frac{1}{4}X^2$

② すべてのXについて考えると，求める領域は，

$y\leqq\frac{1}{4}\chi^2$





［答　案］

実数kが変化するときの，直線ℓ上の $\chi=X$ である点のy座標のとりうる値の範囲を考える。　◀まず，χ座標をXに固定してy座標の範囲を考える。（Xは一般的定数）

$y=-k^2+Xk=-\left(k-\frac{X}{2}\right)^2+\frac{1}{4}X^2$

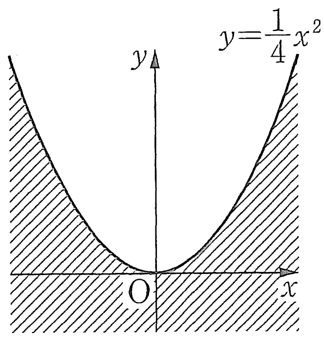
よって，yのとりうる値の範囲は

$y\leqq\frac{1}{4}X^2$

Xを変化させることにより，

求める領域は　$y\leqq\frac{1}{4}\chi^2$　◀【注１】参照 ⬇

★



【注１】$\chi=X$のとき$y\leqq\frac{1}{4}X^2$ であるから，

すべてのXで考えると，$y\leqq\frac{1}{4}X^2$

【注２】この解き方は「ファクシミリの原理」と呼ばれることがありますが，これは”ニックネーム”ですので，試験では使ってはいけません。

１８

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
2 不等式の表す領域（その７）
（２／７）■　通過領域の問題①　■

◇《直線の通過領域(逆像法)》 学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

定数ｍがすべての実数の値をとって変化するとき，直線ｙ＝２ｍχ－ｍ^2　…①　が通過する領域を図示せよ。

▼　軌跡・領域の求め方　▼

全体の流れ：求める軌跡上の点を$(X,\ Y)$と置いて，XとYの関係式を求める。

- **パターン１**：（パラメータがでてきたら）パラメータを消去する。　◀パラメータ＝媒介変数
- **パターン２**：パラメータが消去できないときは，「逆像法」を使う。　→No.１８
- **パターン３**：パラメータに変域があるときは，「１文字固定」を使う。→No.１８ｓ

【考え方】今回は，「軌跡・領域の求め方」のうち，**パターン２**：パラメータが消去できない場合の軌跡の求め方について学習します。（No.４からのつづきです。）

1　領域内の点を$(X,\ Y)$とおいて，XとYの関係式を求める。
2　パラメータｍが存在するための条件を調べる。

［答　　案］

1　（求める領域内の点を$(X,\ Y)$とおいて，XとYの関係式を求める）

直線①が求める領域内の点$(X,\ Y)$を通るとすると，　◀X，Yは一般的定数

こ　◀ｍが存在するための条件を調べるため。

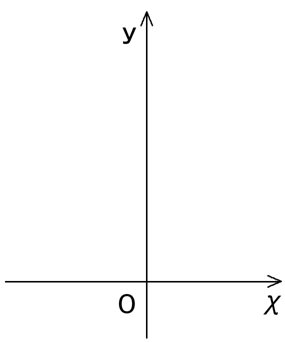
2　（パラメータの存在条件を調べる）

◀X，Yの関係式

3　（領域を求める）

したがって，求める領域は＿＿＿＿＿＿＿＿であり，
右図の斜線部分。ただし，境界線を＿＿＿＿＿＿。

《求める領域》



｜メニューへ戻る｜

１８

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

2 不等式の表す領域（その７）

（３／７）■　通過領域の問題①　■

◇《直線の通過領域（逆像法）》 **学力化**➡　　／　，

★演習★【１】

直線 $y=2a\chi+a^2$ …①について，a がすべての実数値をとって変化するとき，直線①が通りうる領域を図示せよ。

【考え方】1　領域内の点を（X，Y）とおいて，X と Y の関係式を求める。

2　パラメータ a が存在するための条件を調べる。

［答　　案］

1　（求める領域内の点を（X，Y）とおいて，X と Y の関係式を求める）

直線①が求める領域内の点（X，Y）を通るとすると，

◀X，Y は一般的定数

◀aが存在するための条件を調べるため。

2　（パラメータの存在条件を調べる）

②を満たす実数 a が存在するから，判別式をＤとすると，Ｄ≧０

◀X，Y の関係式

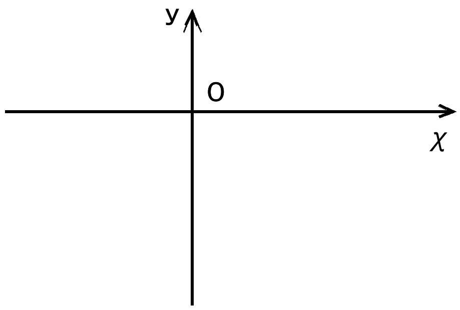
3　（領域を求める）

したがって，求める領域は ________ であり，

右図の斜線部分。ただし，境界線を ________。

◀X，Y を χ，y に戻す。
（X，Y は一般的定数であるから。あるいは問題に与えられていないから。）

《求める領域》



１８

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

２ 不等式の表す領域（その７）

（４／７）■　通過領域の問題①　■

◇《直線の通過領域（逆像法）》 **学力化**➡　　／　，

★演習★【２】

直線 $y = a\chi + \dfrac{1-a^2}{4}$　…①について，ａがすべての実数値をとって変化するとき，

直線①が通りうる領域を図示せよ。

【考え方】 1　領域内の点を（X，Y）とおいて，X と Y の関係式を求める。

2　パラメータａが存在するための条件を調べる。

［答　　案］

1 （求める領域内の点を（X，Y）とおいて，X と Y の関係式を求める）

直線①が求める領域内の点（X，Y）を通るとすると，

◀X，Y は一般的定数

◀ａが存在するための条件を調べるため。

2 （パラメータの存在条件を調べる）

◀X，Y の関係式

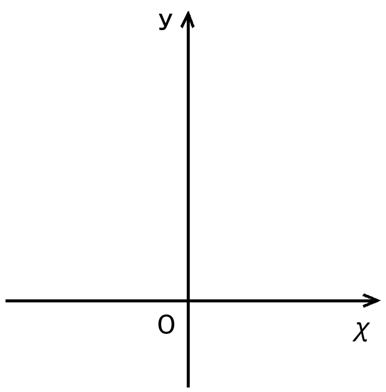
3 （領域を求める）

したがって，求める領域は　　　　　　　　　　であり，

◀X，Y を χ，ｙに戻す。
（X，Y は一般的定数であるから。
あるいは問題に与えられていないから。）

下図の斜線部分。ただし，境界線を　　　　　。

《求める領域》



｜メニューへ戻る｜

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
2 不等式の表す領域（その７）
（５／７）■　通過領域の問題　■

◇《直線の通過領域(逆像法)》 学力化➡　／　,

★演習★【３】

放物線 $y=\chi^2$ 上の２点Ａ$(\alpha,\ \alpha^2)$，Ｂ$(\beta,\ \beta^2)$は，$\beta-\alpha=1$ を満たしている。このとき，直線ＡＢが通過する領域を図示せよ。

【考え方】直線ＡＢの式を求めると，これまでと同じ考え方で解ける。
ただし，$\beta-\alpha=1$ を使って，α だけの式にしておくこと。
このとき，α がいままでの問題の a に相当する。
直線の式は，傾きとその直線が通る１点の座標がわかれば求まる。

［答　案］

0　（直線ABの方程式を求める）　◀この0の部分がこの問題の特殊性である。

直線ＡＢの傾きは，

したがって，直線ＡＢの方程式は，

◀傾きが $2\alpha+1$ で，点A$(\alpha,\ \alpha^2)$ を通る直線

◀ $y=$～の式に書きかえる。

★

1　（求める領域内の点を$(X,\ Y)$とおいて，XとYの関係式を求める）

直線①が求める領域内の点$(X,\ Y)$を通るとすると，　◀$X,\ Y$は一般的定数

◀α が存在するための条件を調べるため。

2　（パラメータの存在条件を調べる）

◀$X,\ Y$の関係式

（次のページへつづく）↗

□ □ 【軌跡と領域　No.１８（５／７）】 －〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

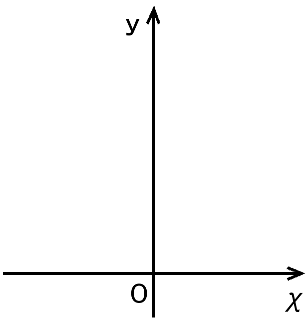
3 （領域を求める）

したがって，求める領域は ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿ であり， ◀X，Yをχ，yに戻す。

（X，Yは一般的定数であるから。
あるいは問題に与えられていないから。）

下図の斜線部分。ただし，境界線を ＿＿＿＿＿＿。

《求める領域》



１８

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
2 不等式の表す領域（その７）
（６／７）■　通過領域の問題　■

◇《直線の通過領域（逆像法）》 **学力化➡**　　／　，

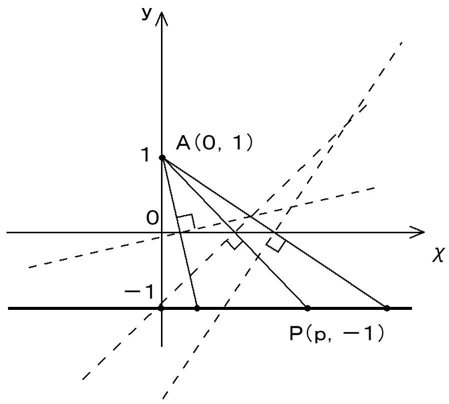
★演習★【４】

点Ａ（０，１）を定め，点Ｐは直線ｙ＝－１上を動くとする。線分ＡＰの垂直二等分線は点Ｐの変化に伴って，どのような図形を描くか。

【考え方】

右図の垂直二等分線（点線）の集合が求める図形である。
この直線の式を求めると，これまでと同じ考え方で解ける。
直線の式は，
傾きとその直線が通る１点の座標がわかれば求まる。

図的状況



［答　　案］

0 （線分APの垂直二等分線の方程式を求める）　◀この0の部分がこの問題の特殊性である。

点Ｐの座標を（ｐ，－１）とする。

線分ＡＰの中点の座標は，

ｐ≠０のとき，直線ＡＰの傾きは，

だから，線分ＡＰの垂直二等分線の傾きｍは，ｍ＝　◀$-\frac{2}{p}\times m=-1$

よって，線分ＡＰの垂直二等分線の方程式は

より，ｙ＝　…①

ｐ＝０のときも①は成り立つ。　◀線分APの中点（0，0）を通り，χ軸に平行な直線y＝0

★

1 （求める領域内の点を（X，Y）とおいて，XとYの関係式を求める）

直線①が求める領域内の点（X，Y）を通るとすると，　◀X，Yは一般的定数

◀pが存在するための条件を調べるため。

（次のページへつづく）↗

□ □ 【軌跡と領域 No.１８（６／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

2 （パラメータの存在条件を調べる）

◀ X，Y の関係式

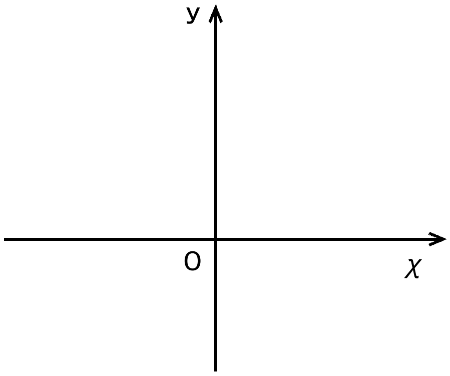
3 （領域を求める）

したがって，求める領域は ＿＿＿＿＿＿＿＿ であり，

下図の斜線部分。ただし，境界線を ＿＿＿＿ 。

◀ X，Y を x，yに戻す。
（X，Y は一般的定数であるから。
あるいは問題に与えられていないから。）

《求める領域》



メニューへ戻る

数Ⅱ １８ 第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
２ 不等式の表す領域（その７）
（７／７）■　通過領域の問題　■

◇《直線の通過領域(逆像法)》 学力化➡　／　,

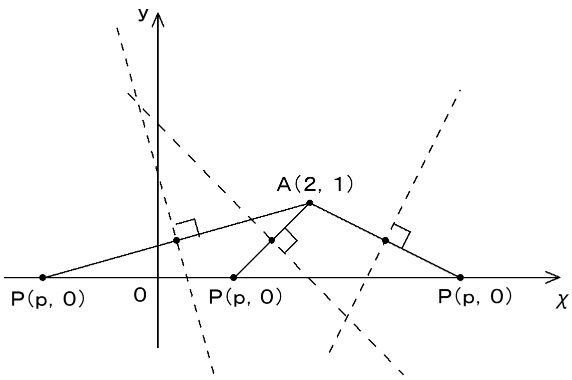
★演習★【５】

χ 軸上を動く点Ｐがある。点Ａ（２，１）と点Ｐを結ぶ線分ＡＰの垂直二等分線が通らない領域を図示せよ。

【考え方】
右図の垂直二等分線(点線)の補集合が求める図形である。

「通らない」 $\Longleftrightarrow$ 実数値をもたない。
Ｄ＜０

《図的状況》



［答　　案］

0 (線分APの垂直二等分線の方程式を求める)

点Ｐの座標を(ｐ，０)とする。

線分ＡＰの中点の座標は，

ｐ≠２のとき，直線ＡＰの傾きは，

だから，線分ＡＰの垂直二等分線の傾きｍは，ｍ＝　　◀ $-\dfrac{1}{p-2}\times m=-1$

よって，線分ＡＰの垂直二等分線の方程式は

…①

ｐ＝２のときも①は成り立つ。　◀線分APの中点 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通り，直線 $y=\dfrac{1}{2}$ これも①に含まれる。

★

（次のページへつづく）

□□　【軌跡と領域　No.１８（７／７）】　－〈２枚目／２枚〉

（前のページからのつづき）

1　（求める領域内の点を $(X,\ Y)$ とおいて，X と Y の関係式を求める）

直線①が求める領域内の点 $(X,\ Y)$ を通るとすると，

◀$X,\ Y$ は一般的定数

◀pが存在するための条件を調べるため。

2　（パラメータの存在条件を調べる）

◀$X,\ Y$ の関係式

3　（領域を求める）

したがって，求める領域は，直線①が点 $(X,\ Y)$ を通らない領域であるから，

____________________ であり，

◀直線①が点 $(X,\ Y)$ を通る領域の補集合

下図の斜線部分。ただし，境界線を ____________ 。

《求める領域》