発展 ＊４

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域
１ 軌跡　■　連動点の軌跡①　■
【No.４の後で学習☆発展問題】（１／４）

条件が媒介変数

◇《条件が媒介変数で与えられている問題》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

放物線Ｃ：ｙ＝χ²と直線ℓ：ｙ＝ｍ（χ－１）は異なる２点Ａ，Ｂで交わっている。
(1) 定数ｍの値の範囲を求めなさい。
(2) ｍの値が変化するとき，線分ＡＢの中点の軌跡を求めなさい。

▼　軌跡・領域の求め方　▼

全体の流れ：求める軌跡上の点を（X，Y）と置いて，XとYの関係式を求める。

・**パターン１**：（パラメータがでてきたら）パラメータを消去する。　◀パラメータ＝媒介変数
・**パターン２**：パラメータが消去できないときは，「逆像法」を使う。　→No.１８
・**パターン３**：パラメータに変域があるときは，「１文字固定」を使う。→No.１８ｓ

【考え方】(1) 放物線Ｃと直線ℓが異なる２点Ａ，Ｂで交わるから，
Ｃとℓを連立してできるχについての２次方程式の判別式をＤとすれば
Ｄ＞０である。そこで，

1　放物線Ｃと直線ℓの方程式からｙを消去して，χについての２次方程式を作る。…①
2　①の判別式をＤとし，Ｄ＞０より，ｍについての不等式を作る。…②
3　②の不等式を解いて，ｍの範囲を求める。

【考え方】(2) 線分ＡＢの中点の軌跡の求め方

▼　軌跡・領域の求め方　▼

全体の流れ：求める軌跡上の点を（X，Y）と置いて，XとYの関係式を求める。

・**パターン１**：（パラメータがでてきたら）パラメータを消去する。　◀パラメータ＝媒介変数

［答　　案］

(1) 定数ｍの値の範囲を求める

ｙ＝χ²とｙ＝ｍ（χ－１）からｙを消去すると，

$\chi^2 = m(\chi - 1)$　　◀交点は2つのグラフの連立

これをχについて整理して，$\chi^2 - m\chi + m = 0$　…①

Ｃとℓは異なる２点で交わっているから，①の判別式をＤとすると，

$D = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = m(m-4) > 0$

よって，ｍ＜０，４＜ｍ　…②

（次のページへつづく）↗

□ □　【軌跡と領域　No. 4 s（1／4）】　－〈2枚目／2枚〉

↗（前のページからのつづき）

(2) 線分ＡＢの中点の軌跡を求める

求める軌跡上の点をＰ(X, Y)と置いて，XとYの関係式を求める。　◀X, Yは一般的定数

1　（条件をパラメータで表す）

・２点Ａ，Ｂのx座標は，２次方程式①の異なる２つの実数の解α，βであるから，
　解と係数の関係から，　◀2次方程式の解と係数の関係→別紙参照

$$X = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{m}{2} \quad \cdots③$$

◀①より，$\alpha+\beta = -\frac{-m}{1} = m$

・Ｐは，直線ℓ上の点であるから，③をℓの式に代入して，

$$Y = m(X-1) = m\left(\frac{m}{2}-1\right) = \frac{1}{2}m^2 - m \quad \cdots④$$

2　（パラメータを消去する）

・③より，$m = 2X$　…③'　であるから，
　③'を④に代入してmを消去すると，　◀パラメータの消去

$$Y = \frac{1}{2}(2X)^2 - 2X$$

$$Y = 2X^2 - 2X$$

◀XとYの関係式

・(1) より，$m<0$，$4<m$　であるから，

　これに③'を代入すると，，

$2X<0$　より，$X<0$

$4<2X$　より，$2<X$

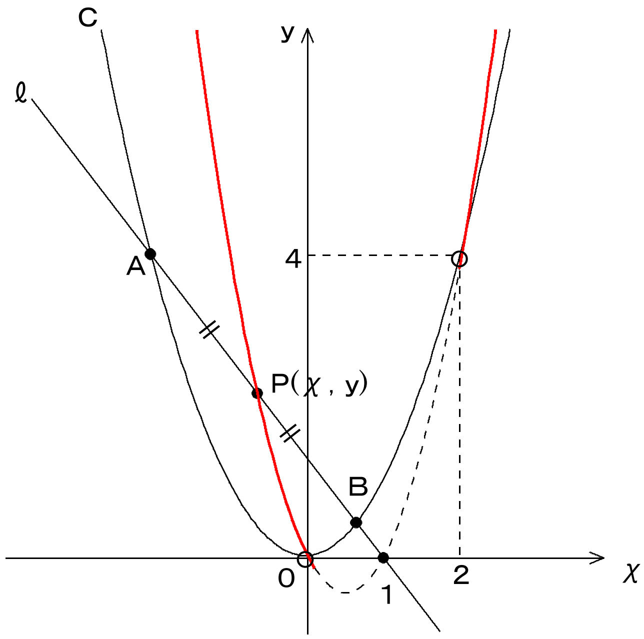
3　（軌跡を求める）

したがって，求める軌跡は，

放物線　$y=2x^2-2x$
($x<0$，$2<x$)

▲X, Yをx, yに戻す。
（X, Yは一般的定数であるから。）
（あるいは，問題文に与えられていないから。）

《グラフ》



｜メニューへ戻る｜

発展

＊４

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

１ 軌跡　■　連動点の軌跡①　■

【No.４の後で学習☆発展問題】（２／４）

◇《条件が媒介変数で与えられている問題》**学力化**➡　　／　，

★理解のチェック★

放物線Ｃ：ｙ＝χ^2－χと直線ℓ：ｙ＝ｍ（χ－１）－１は異なる２点Ａ，Ｂで交わっている。

(1) 定数ｍの値の範囲を求めなさい。

(2) ｍの値が変化するとき，線分ＡＢの中点の軌跡を求めなさい。

［答　　案］

(1) 定数ｍの値の範囲を求める

◀交点は2つのグラフの連立

◀動点(媒介変数)の範囲

(2) 線分ＡＢの中点の軌跡を求める

求める軌跡上の点をＰ(X，Y)と置いて，XとYの関係式を求める。　◀X，Yは一般的定数

1　（条件をパラメータで表す）

（次のページへつづく）↗

□ □ 【軌跡と領域　No.４ｓ（２／４）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

2 （パラメータを消去する）

◀パラメータの消去

◀XとYの関係式

3 （軌跡を求める）

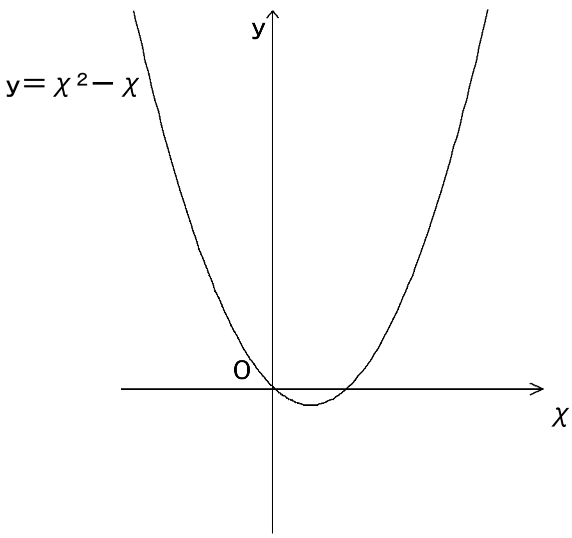
したがって，求める軌跡は，

◀X，Yをχ，yに戻す。

（X，Yは一般的定数だから。）

《グラフ／計算》

《グラフ》



発展
＊４

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

１ 軌跡　■　連動点の軌跡①　■

【No.４の後で学習☆発展問題】（３／４）

◇《条件が媒介変数で与えられている問題》**学力化**➡　　／　，

◇発展演習◇【１】

ｔが実数値をとって変化するとき，次の点Ｐはどのような図形を描くか。

(1)　Ｐ（ｔ＋２，２ｔ^2－３）

(2)　放物線 $y=\chi^2-2(t+1)\chi+t+1$ が χ 軸と異なる２点で交わるときの頂点Ｐ

【考え方】▼　軌跡・領域の求め方　▼

全体の流れ：求める軌跡上の点を$(X,\ Y)$と置いて，XとYの関係式を求める。

・**パターン１**：（パラメータがでてきたら）パラメータを消去する。　◀パラメータ＝媒介変数

［答　　案］

(1)　Ｐ（ｔ＋２，２ｔ^2－３）

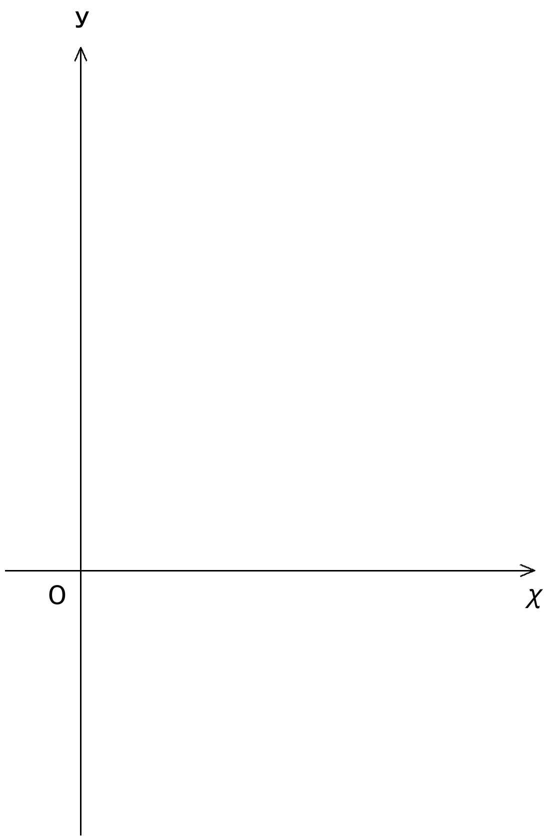
求める軌跡上の点をＰ$(X,\ Y)$と置いて，XとYの関係式を求める。　◀X，Yは一般的定数

1　（条件をパラメータで表す）

◀ｔがパラメータ

2　（パラメータを消去する）

《グラフ》



3　（軌跡を求める）

したがって，求める軌跡は，

▲X，Yをχ，yに戻す。

《グラフ／計算》

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

（前のページからのつづき）

【考え方】(2) 放物線を平方完成して標準形に変形することで，頂点の座標から χ，y を媒介変数 t で表すことができるようになる。　…$\boxed{2}$
「異なる２点で交わる」という条件から，t の範囲に制限がつく。　…$\boxed{4}$
▲pのy座標＜0

［答　　案］

(2) 放物線 $y=\chi^2-2(t+1)\chi+t+1$ が χ 軸と異なる２点で交わるときの頂点 P

求める軌跡上の点を P（X，Y）と置いて，X と Y の関係式を求める。　◀X，Y は一般的定数

$\boxed{1}$ （条件をパラメータで表す）

・与式の２次関数の一般形を標準形になおして，　◀放物線の頂点の座標を求めるため。

$\boxed{2}$ （パラメータを消去する）

$\boxed{3}$ （軌跡を求める）

したがって，求める軌跡は，

▲X，Y を χ，yに戻す。

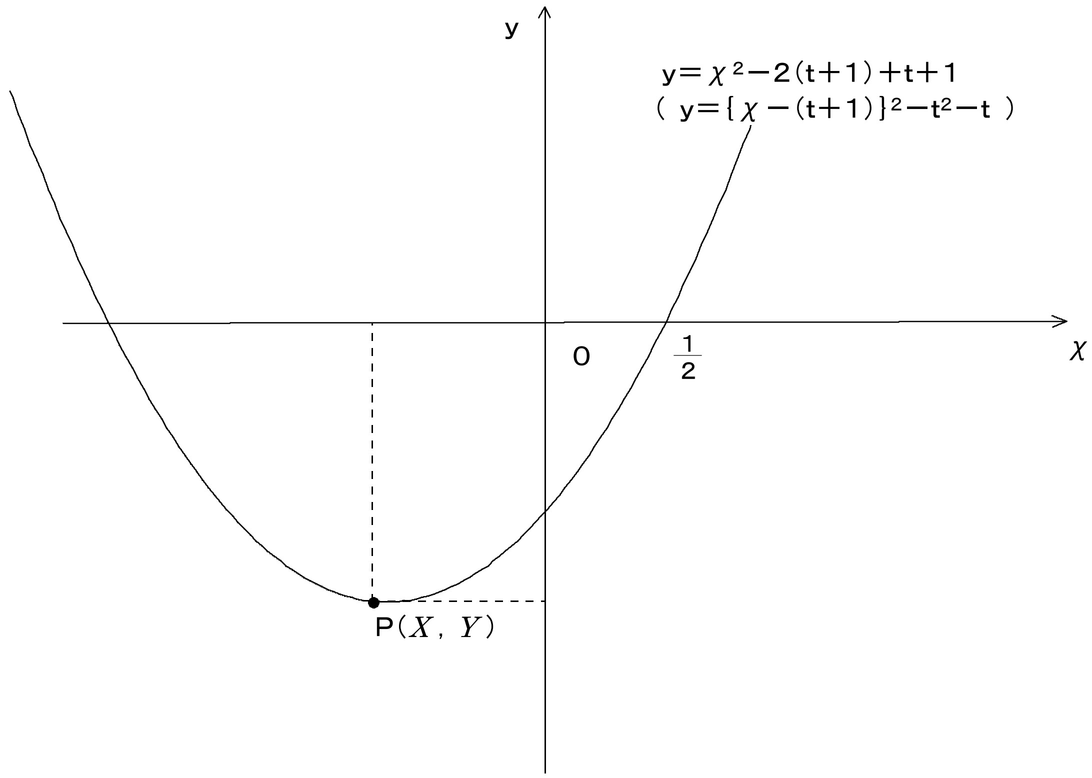
◀グラフは「次のページ」へ

（次のページへつづく）

□ □ 【軌跡と領域　No.４ｓ（３／４）】 ー〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

《グラフ》



《グラフ／計算》

発展
＊４

第２章　図形と方程式　３・軌跡と領域

１ 軌跡　■　連動点の軌跡①　■

【No.４の後で学習☆発展問題】（４／４）

◇《条件が媒介変数で与えられている問題》**学力化**➡　／　，

◇発展演習◇【２】

ｔが実数値をとって変化するとき，次の点Ｐはどのような図形を描くか。

(1)　$P(2t-2,\ 3t^2+1)$

(2)　円 $\chi^2+y^2-2t\chi+4ty+6t^2-1=0$ の中心Ｐ

【考え方】(2)　「円を表す」という条件から，ｔの範囲に制限がつく。つまり，半径＞０

［答　　案］

(1)　$P(2t-2,\ 3t^2+1)$

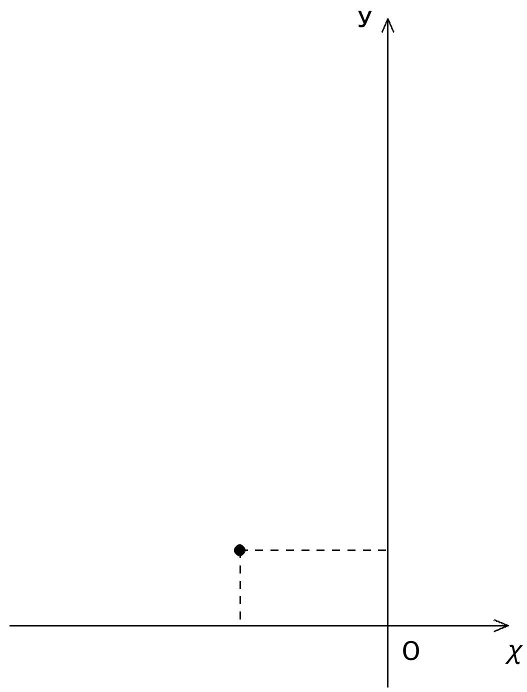
求める軌跡上の点をＰ（X，Y）と置いて，X と Y の関係式を求める。　◀X，Y は一般的定数

1　（条件をパラメータで表す）

◀ｔがパラメータ

2　（パラメータを消去する）

《グラフ》



◀X と Y の関係式

3　（軌跡を求める）

したがって，求める軌跡は，

▲X，Y を χ，y に戻す。

（次のページへつづく）↗

□□　【軌跡と領域　No.４ｓ（４／４）】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(2)　<u>円$\chi^2+y^2-2t\chi+4ty+6t^2-1=0$の中心P</u>

求める軌跡上の点をP(X，Y)と置いて，XとYの関係式を求める。　◀X，Yは一般的<u>定数</u>

1　<u>（条件をパラメータで表す）</u>

・与式の円の一般形を標準形になおして，　◀円の中心の座標を求めるため。

◀平方完成

2　<u>（パラメータを消去する）</u>

・

◀パラメータの消去

◀<u>XとYの関係式</u>

・

◀(＊)で，(円の半径)＞0

3　<u>（軌跡を求める）</u>

したがって，求める軌跡は，

▲X，Yをχ，yに戻す。

《グラフ》