発展

＊１３

第２章　図形と方程式　２・円と直線
2 円と直線（その４）
【No.１３の後で学習☆発展問題】（１／７）

放物線と円の共有点・接点

◇《放物線と円の共有点・接点》学力化➡　／　,

★解法の技術★

放物線 $y=x^2+a$ …①と円 $x^2+y^2=9$ …②について，次のものを求めよ。
(1) この放物線と円が接するとき，定数ａの値
(2) 異なる４個の交点をもつような定数ａの値の範囲

【考え方】《パターン１》放物線が動く問題（ｙ軸にそって平行移動）

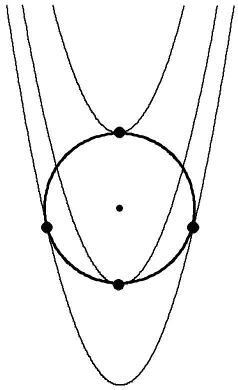
・放物線と円の共有点についても，これまで学習した方針

共有点 ⟺ 実数解　　接点 ⟺ 重解

で考えればよい。

・この問題では，x を消去して，
y の２次方程式 $(y-a)+y^2=9$ の実数解，重解
を考える。　◀yを消去すると x^4 が現れて難しくなる。

・なお，放物線と円が接するとは，
円と放物線が共通の接線をもつときで，
この問題では，右の図のようになり，
（ｉ）　２点で接する場合と
（ⅱ）　１点で接する場合
がある。



［答　　案］／ ★★★★☆ ／

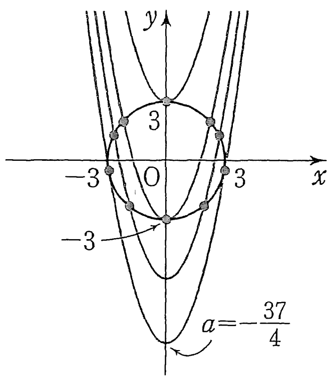
(1) $\boxed{1}$ （放物線と円の方程式を連立し，yについての2次方程式を作る）

①より，$x^2=y-a$　◀yを消去すると x^4 が現れて難しくなる。
これを②に代入すると，$(y-a)+y^2=9$
これを y について整理して，
$y^2+y-a-9=0$ …③

（ｉ）放物線①と円②が２点で接するのは，
y の２次方程式③が重解をもつときである。

③の判別式をＤとすると，$D=0$
$D=1^2-4\cdot1\cdot(-a-9)$
$=4a+37$

よって，$4a+37=0$ より，$a=-\dfrac{37}{4}$



（次のページへつづく）↗

□ □ 【円と直線　No. １３ｓ（１／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

（ⅱ） 放物線①と円②が１点で接するのは，
点（０，３），（０，－３）で接するときである。　　◀前ページの図を参照。

よって，ａ＝±３

$\boxed{2}$ （答をまとめる）

（ⅰ）と（ⅱ）より，求めるａの値は，$a=-\dfrac{37}{4}$，±３

(2) 放物線①と円②が４個の共有点をもつのは，
放物線①の頂点が，点（０，$-\dfrac{37}{4}$）から点（０，－３）を結ぶ線分上（端点を除く）にあるときである。　　◀前ページの(1) の図を参照。

したがって，$-\dfrac{37}{4}<a<-3$

発展

＊１３

第２章　図形と方程式　２・円と直線

２ 円と直線（その４）

【No.１３の後で学習☆発展問題】（２／７）

◇《放物線と円の共有点・接点》 学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

放物線 $y=2\chi^2+a$ …①と円 $\chi^2+(y-2)^2=1$ …②について，次のものを求めよ。

(1) この放物線と円が接するとき，定数 a の値

(2) 異なる４個の交点をもつような定数 a の値の範囲

【考え方】《パターン１》放物線が動く問題（ｙ軸にそって平行移動）

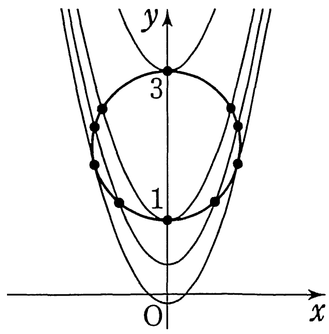
［答　　案］／ ★★★★☆ ／

(1) $\boxed{1}$ （放物線と円の方程式を連立し，yについての2次方程式を作る）

①より，$\chi^2=$ 　　◀yを消去するとχ^4 が現れて難しくなる。

（ｉ） 放物線①と円②が２点で接するのは，

　　　　ときである。



（ⅱ） 放物線①と円②が１点で接するのは，

　　　　ときである。　◀上の図を参照。

よって，a ＝

$\boxed{2}$ （答をまとめる）

（ｉ）と（ⅱ）より，求める a の値は，a ＝

(2) 放物線①と円②が４個の共有点をもつのは，

ときである。　◀上の図を参照。

したがって，

★演習★の問題は数専ゼミ·東原教室で個人指導を受けることができます。

発展

＊１３

第２章　図形と方程式　２・円と直線

２ 円と直線（その４）

【No.１３の後で学習☆発展問題】（３／７）

◇《放物線と円の共有点・接点》 学力化➡　　／　，

◇発展演習◇【１】

放物線 $y=x^2$ …①と円 $x^2+(y-2)^2=r^2$ （$r>0$）…②がある。

(1) 放物線と円が接するときの r の値を求めよ。

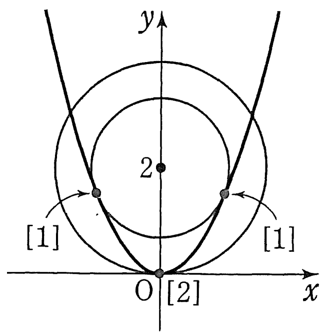
(2) ４個の交点をもつような r の値の範囲を求めよ。

【考え方】《パターン２》円の半径が動く問題（拡大・縮小）

［答　　案］／ ★★★★☆ ／

(1) $\boxed{1}$ （放物線と円の方程式を連立し，yについての２次方程式を作る）

①より，$x^2=$



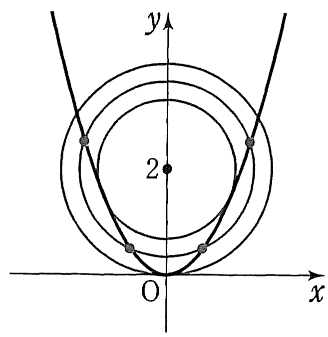
（ｉ） 放物線①と円②が２点で接するのは，

ときである。

▲（ｉ）の場合が［１］
（ii）の場合が［２］

（ii） 放物線①と円②が１点で接するのは，

ときである。



$\boxed{2}$ （答をまとめる）

（ｉ）と（ii）より，求める r の値は，$r=$

(2) 放物線①と円②が４個の共有点をもつのは，

ときである。

したがって，

発展

＊１３

第２章　図形と方程式　２・円と直線

２ 円と直線（その４）

【No.１３の後で学習☆発展問題】（４／７）

◇《放物線と円の共有点・接点》学力化➡　　／　，

◇発展演習◇【２】

ｒ＞０とする。放物線 $y=x^2$ …①と円 $x^2+(y-1)^2=r^2$ （ｒ＞０）…②の共有点の個数が，ｒの値によってどのように変化するかを調べよ。［類　甲南大］

【考え方】《パターン２》円の半径が動く問題（拡大・縮小）

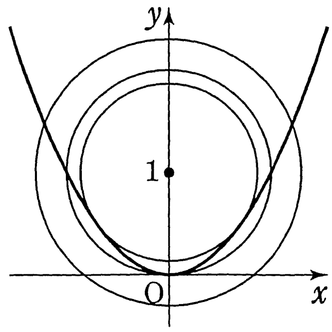
［答　　案］／ ★★★★☆ ／

1 （放物線と円の方程式を連立し，yについての2次方程式を作る）

①より，$x^2=$

（ｉ）放物線①と円②が２点で接するのは，

ときである。



（ii）放物線①と円②が１点で接するのは，

ときである。

2 （答をまとめる）

よって，図から，求める共有点の個数は，

・　のとき　個
・　のとき　個
・　のとき　個
・　のとき　個
・　のとき　個

発展 ＊１３

第２章　図形と方程式　２・円と直線

2 円と直線（その４）

【No.１３の後で学習☆発展問題】（５／７）

◇《放物線と円の共有点・接点》学力化➡　／　，

◇発展演習◇【３】

放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ …①と円 $x^2+(y-a)^2=r^2$ （$a>0$，$r>0$）…②について，次の条件を満たすような a の値の範囲を求め，r を a の式で表せ。

(1) 放物線①と円②が原点Oで接し，かつ他に共有点をもたない。

(2) 放物線①と円②が異なる２点で接する。

【考え方】《パターン３》円の半径と中心が動く問題（拡大・縮小／y 軸上を移動）

・放物線と円の共有点についても，これまで学習した方針

共有点 ⟺ 実数解　　接点 ⟺ 重解

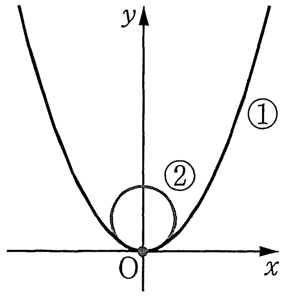
で考えればよい。

・この問題では，x を消去して，
y の２次方程式 $2y+(y-a)^2=r^2$ の重解
を考える。　◀yを消去すると x^4 が現れて難しくなる。

［答　案］／ ★★★☆ ／

0 （放物線と円の方程式を連立し，yについての２次方程式を作る）

①より，$x^2=$



(1) ・放物線①と円②が原点Oで接し，かつ他に共有点をもたないのは，

ときである。

◀$0^2+2(1-a)\cdot 0+(a^2-r^2)=0$

◀$a^2=r^2$

◀ r を消去

◀$y^2+2(1-a)y+(a^2-a^2)=0$

◀因数分解（③の解を求める

☆下記【注】を参照⬇

◀$-2(1-a)=2(a-1)$

◀これが正であってはいけない。

したがって，

◀$2(a-1)=0$のときも含まれることに注意すること。

（次のページへつづく）↗

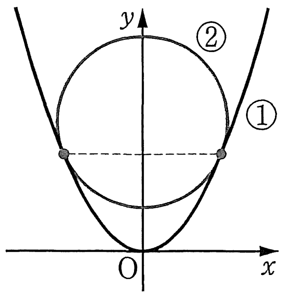
□ □　【円と直線　No. １３s（５／７）】　ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

【注】共有点が原点のみであるから，ｙ≧０においては， ｙ＝０しか解はない。 また，このとき，グラフの対称性から，原点で接するといえる。

(2) 放物線①と円②が異なる２点で接するのは，

ときである。



1 （rをaの式で表す）

2 （重解が正となるaの条件を求める）

◀ ｒを消去する。

◀因数分解

◀③は正の重解

3 （答をまとめる）

したがって，ａ ＿＿＿＿＿，ｒ＝ ＿＿＿＿＿

◀$a \geqq \frac{1}{2}$ かつa＞1より，a＞1

発展 ＊１３

第２章　図形と方程式　２・円と直線

２ 円と直線（その４）

【No.１３の後で学習☆発展問題】（６／７）

◇《放物線と円の共有点・接点》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ …①と円 $x^2+(y-a)^2=r^2$ （$a>0$，$r>0$）…②について，

次の条件を満たすような a の値の範囲を求め，r を a の式で表せ。

(1) 放物線①と円②が原点Ｏで接し，かつ他に共有点をもたない。

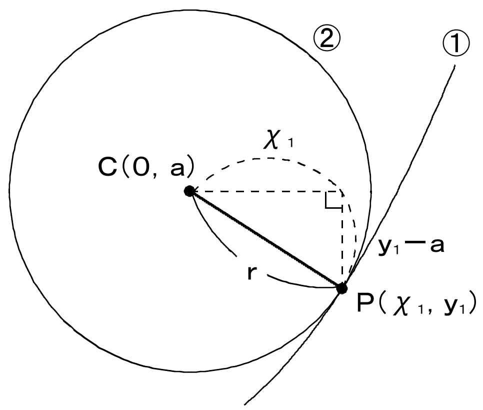
(2) 放物線①と円②が異なる２点で接する。

【注】この問題は，◇発展演習◇【３】の別解です。

【考え方】《パターン３》円の半径と中心が動く問題（拡大・縮小／ｙ軸上を移動）

・放物線①上に点Ｐ$(x_1,\ y_1)$をとり，円②の中心Ｃ$(0,\ a)$との距離ＣＰの式を求める。（三平方の定理）

・放物線①上の点Ｐ$(x_1,\ y_1)$と円②の中心Ｃ$(0,\ a)$との距離ＣＰの最小値が円の半径と一致するとき，その最小となる点で放物線①と円②は接する。



［答　　案］／ ★★★☆ ／

0 （定義）

・放物線①上の点をＰ$(x_1,\ y_1)$とおくと，

$y_1=\frac{1}{2}x_1^2$ より，$x_1^2=2y_1$ …③

また，③より，$y_1\geqq 0$ ◀ y_1の範囲

・円②の中心は点$(0,\ a)$であり，半径は r （$a>0$，$r>0$）である。 ◀円の半径

・ここで，円②の中心$(0,\ a)$をＣとおき，
円の中心から放物線までの最短距離について考えると，

$CP^2=x_1^2+(y_1-a)^2$ ◀三平方の定理

$=2y_1+y_1^2-2ay_1+a^2$ ◀③より，$x_1^2=2y_1$

$=y_1^2-2(a-1)y_1+a^2$ ◀y_1について整理

$=y_1^2-2(a-1)y_1+(a-1)^2-(a-1)^2+a^2$ ◀平方完成

$=\{y_1-(a-1)\}^2+2a-1$ （$y_1\geqq 0$） ◀CP^2の標準形

（次のページへつづく）↗

□□　【円と直線　No.１３s（６／７）】　－〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

(1) 1 （CPの最小値を求める）

◀最小値をとるy_1を求めるために，軸の位置を考え，場合分けをする。

$f(y_1)=\{y_1-(a-1)\}^2+2a-1$　（$y_1 \geqq 0$）のグラフにおいて，
軸の位置を考えると，

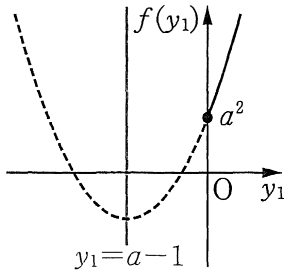
$a-1 \leqq 0$　すなわち　$0<a \leqq 1$のとき，
CP^2は$y_1=0$のとき，最小値a^2

◀$CP^2=\{0-(a-1)\}^2+2a-1=a^2$

すなわち，CPは$y_1=0$のとき，最小値aとなり，

◀OP＞0より，OP^2が最小のとき，OPも最小となる。

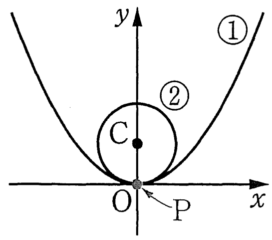
③より，$y_1=0$のとき，$x_1=0$　◀①と②は原点で接する。



2 （答をまとめる）

したがって，求めるaの値の範囲は，$0<a \leqq 1$
rをaの式で表すと，$r=a$

◀円の中心は，条件より(0，a)



(2) 1 （CPの最小値を求める）

$f(y_1)=\{y_1-(a-1)\}^2+2a-1$　（$y_1 \geqq 0$）のグラフにおいて，
軸の位置を考えると，

$0<a-1$　すなわち　$1<a$のとき，

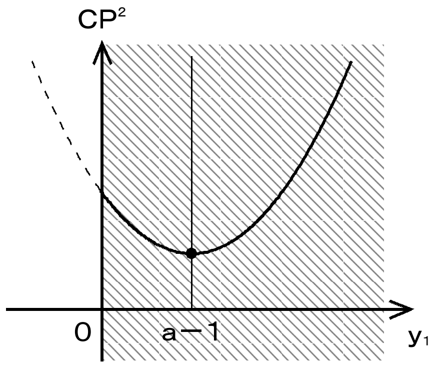
CP^2は$y_1=a-1$のとき，最小値$2a-1$

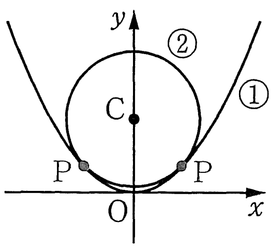
すなわち，CPは$y_1=a-1$のとき，最小値$\sqrt{2a-1}$となり，

◀OP＞0より，OP^2が最小のとき，OPも最小となる。

③より，$y_1=a-1$のとき，$x_1=\pm\sqrt{2(a-1)}$
$1<a$より，$x_1 \neq 0$

◀$x_1 \neq 0$を確認。$x_1=0$であると，③より，$y_1=0$となり，
放物線①と円②は2点で接することはないから。





よって，放物線①と円②が異なる２点で接するとき，

$\sqrt{2a-1}=r$

（円の中心から放物線までの最短距離）＝（円の半径）
のとき，２点で接する

（次のページへつづく）↗

□ □ 【円と直線　No.１３s（６／７）】 ―〈３枚目／３枚〉

（前のページからのつづき）

$\boxed{2}$ （答をまとめる）

したがって，

求めるａの値の範囲は，$1 < a$

ｒをａの式で表すと，$r = \sqrt{2a - 1}$

発展

＊１３

第２章　図形と方程式　２・円と直線

２ 円と直線（その４）

【No.１３の後で学習☆発展問題】（７／７）

◇《放物線と円の共有点・接点》学力化➡　　／　，

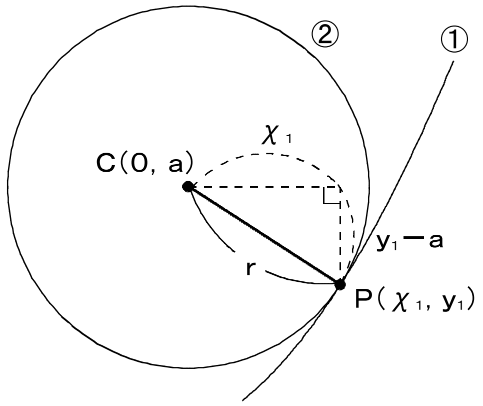
★理解のチェック★

放物線 $ay=\chi^2-5a$　…①と円 $\chi^2+y^2=16$　…②が２点で接するように定数a の値を定めよ。　［自治医大］

【考え方】《パターン４》放物線が動く問題（グラフの開閉）

・放物線①上に点Ｐ$(\chi_1,\ y_1)$をとり，円②の中心Ｃ（０，ａ）との距離ＣＰの式を求める。（三平方の定理）

・放物線①上の点Ｐ$(\chi_1,\ y_1)$と円②の中心Ｃ（０，ａ）との距離ＣＰの最小値が円の半径と一致するとき，その最小となる点で放物線①と円②は接する。



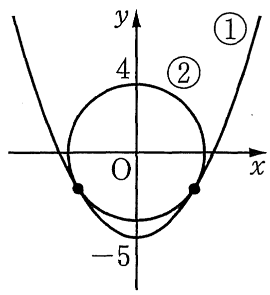
［答　　案］＜2016版・LEGEND・数学Ⅱ＋B・p184・練習106＞／ ★★★☆ ／

0 （aの条件を調べる）

・①は放物線を表すから ________

・また，________，放物線①は点（０，－５）を頂点とする上に凸の放物線となり，放物線①と円②は共有点をもたない。

・よって，________の範囲で考える。



1 （定義）

・放物線①上の点をＰ$(\chi_1,\ y_1)$とおくと，

$ay_1=\chi_1{}^2-5a$　より，$\chi_1{}^2=$ ________…③

また，③と $a>0$ より，

$y_1=$ ________ であるから，________　◀y_1の範囲

・円②の中心は________であり，半径は________である。　◀円の半径

（円の中心から放物線までの最短距離）＝（円の半径）のとき，２点で接する

（次のページへつづく）↗

| メニューへ戻る |

（前のページからのつづき）

・ここで，円の中心から放物線までの最短距離について考えると，

ＯＰ²＝

◀三平方の定理

◀③より，$\chi_1{}^2 = a y_1 + 5a$

◀y_1について整理

◀平方完成

◀OP^2の標準形

よって，次の２つの場合について考える。

◀最小値をとるy_1を求めるために，軸の位置を考え，場合分けをする。

2 （OPの最小値を求める）

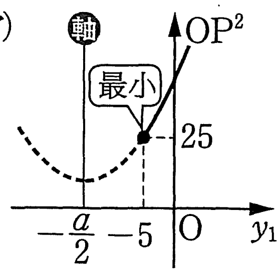
（ア）　$f(y_1) = \left(y_1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 5a$　（$y_1 \geqq -5$）のグラフにおいて，

軸の位置を考えると，

　　　　すなわち　　　　のとき，

ＯＰ²は，

すなわち，ＯＰは

(ア)


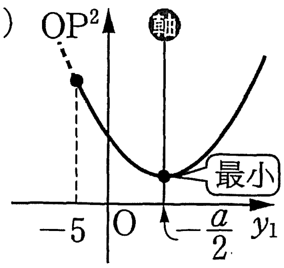
（イ）　$f(y_1) = \left(y_1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 5a$　（$y_1 \geqq -5$）のグラフにおいて，

軸の位置を考えると，

　　　　すなわち　　　　のとき，

ＯＰ²は

すなわち，ＯＰは

(イ)


③より，$y_1 = -\frac{a}{2}$ のとき，$\chi_1 =$

$0 < a < 10$より，χ_1

◀$\chi_1 \neq 0$を確認。$\chi_1 = 0$であると，③より，$y_1 = -5$となり，放物線①と円②は接することはないから。

（次のページへつづく）

□ □　【円と直線　No.１３s（７／７）】　－〈３枚目／３枚〉

（前のページからのつづき）

よって，放物線①と円②が異なる２点で接するとき，

（円の中心から放物線までの最短距離）＝（円の半径）
のとき，２点で接する

3　（答をまとめる）

（ア），（イ）より，求めるａの値は，　ａ＝ ＿＿＿＿＿＿