5

第２章　図形と方程式　１・点と直線
2 平面上の点の座標（その４）
（１／５）■　座標を利用した証明　■

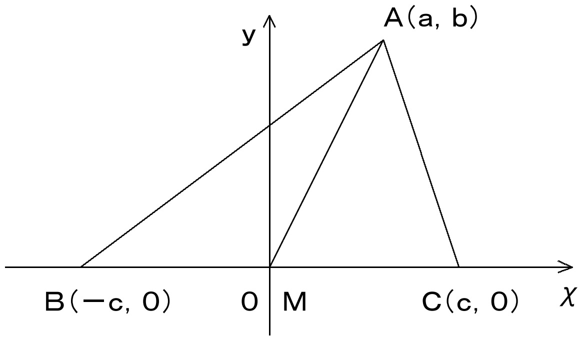
座標を利用した証明

★解法の技術★

△ＡＢＣの辺ＢＣの中点をＭとすると，
$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$　…①
が成り立つことを証明しなさい。

【考え方】線分ＢＣの中点がＭであるから，点Ｍを原点にとると，点Ｂと点Ｃは原点に関して対称の位置にある。

［答　案］



1（△ＡＢＣの頂点とＭを座標上に取る）

点Ｍを原点，直線ＢＣをχ軸にとる。

このとき，Ｂ，Ｃの座標は，それぞれ，
$(-c,\ 0)$，　$(c,\ 0)$
とおくことができる。

また，点Ａの座標を$(a,\ b)$とする。

2（①の両辺を座標で表す）　◀それぞれの線分の長さの2乗を求める（三平方の定理）

このとき，①の左辺を座標で表すと，

$$\underline{AB^2+AC^2}=\{(a+c)^2+(b-0)^2\}+\{(a-c)^2+(b-0)^2\}$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

また，①の右辺を座標で表すと，

$$\underline{2(AM^2+BM^2)}=2\{(a-0)^2+(b-0)^2\}+\{(-c-0)^2+(0-0)^2\}$$
$$=2(a^2+b^2+c^2)$$

3（結論を書く）

よって，$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$

【注】上で証明した性質を **中線定理** といいます。

5

第２章　図形と方程式　１・点と直線
2 平面上の点の座標（その４）
（２／５）■　座標を利用した証明　■

◇《座標を利用した証明》 学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

平面上に長方形ＡＢＣＤがある。点Ｐをこの平面上のどこにとっても，

$$AP^2+PC^2=PB^2+PD^2 \quad \cdots ①$$

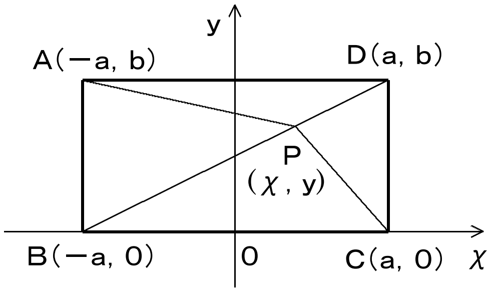
が成り立つことを証明しなさい。

【考え方】座標を利用した証明問題では，計算が楽になるように座標をとる。たとえば，
・座標に０を多く含むようにとる。
・原点や座標軸に関して対称になるようにとる。
（例）辺ＢＣをx軸上に，その中点を原点にとると，Ｂ（$-a$，０），Ｃ（a，０）など

［答　　案］

1 （長方形ＡＢＣＤの頂点とＰを座標上に取る）

線分ＢＣの中点を原点にとり，直線ＢＣをx軸にとる。
このとき，長方形ＡＢＣＤの頂点は，
それぞれ，
Ａ（$-a$，b），Ｂ（$-a$，０），
Ｃ（a，０），Ｄ（a，b）
とおくことができる。
また，Ｐの座標を（x，y）とする。



2 （①の両辺を座標で表す）　　◀それぞれの線分の長さの２乗を求める（三平方の定理）

このとき，①の左辺を座標で表すと，

また，①の右辺を座標で表すと，

3 （結論を書く）

5

第２章　図形と方程式　１・点と直線
2 平面上の点の座標（その４）
（３／５）■　座標を利用した証明　■

◇《座標を利用した証明》 学力化 ➡　　／　　,

★演習★【１】

△ＡＢＣの辺ＢＣを３等分した点のうち，Ｂに近い方の点をＤとする。このとき，等式

$$2AB^2 + AC^2 = 3(AD^2 + 2BD^2) \quad \cdots ①$$

が成り立つことを証明しなさい。

［答　　案］

1（△ＡＢＣの頂点とＤを座標上に取る）

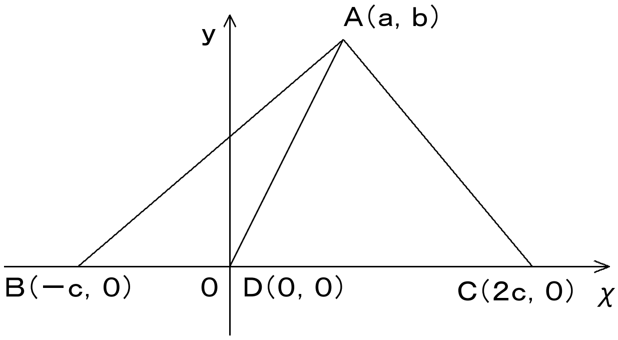
点Ｄを原点，直線ＢＣを χ 軸にとる。

このとき，Ｂ，Ｃの座標は，それぞれ，

（－ｃ，０），（２ｃ，０）

とおくことができる。

また，点Ａの座標を（ａ，ｂ）とすると，



2（①の両辺を座標で表す）

◀それぞれの線分の長さの2乗を求める（三平方の定理）

このとき，①の左辺を座標で表すと，

また，①の右辺を座標で表すと，

3（結論を書く）

｜メニューへ戻る｜

５

第２章　図形と方程式　１・点と直線

２ 平面上の点の座標（その４）

（４／５）■　座標を利用した証明　■

◇《座標を利用した証明》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

△ＡＢＣの重心をＧとするとき，次の等式を証明しなさい。

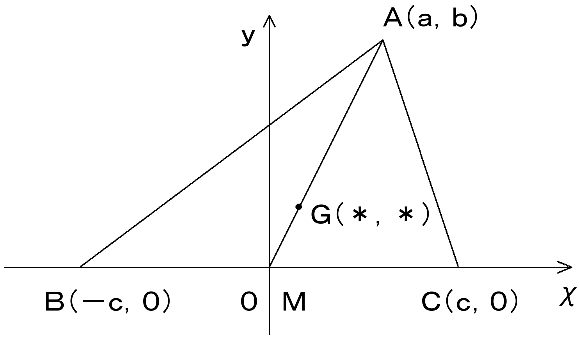
$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=\mathrm{BG}^2+\mathrm{CG}^2+4\mathrm{AG}^2$　…①

【考え方】重心＝頂点と対辺の中点を結ぶ線分を２：１に内分する点

計算を楽にするために，△ＡＢＣの辺ＢＣの中点Ｍを原点，直線ＢＣを χ 軸にとる。

［答　　案］

1（△ＡＢＣの頂点とＭを座標上に取る）



2（①の両辺を座標で表す）

◀それぞれの線分の長さの2乗を求める（三平方の定理）

このとき，①の左辺を座標で表すと，

また，①の右辺を座標で表すと，

3（結論を書く）

５

第２章　図形と方程式　１・点と直線
２ 平面上の点の座標（その４）
（５／５）■　座標を利用した証明　■

◇《座標を利用した証明》**学力化**➡　　／　，

★演習★【３】

四角形ＡＢＣＤの辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＤ，ＤＡの中点をそれぞれＰ，Ｑ，Ｒ，Ｓとする。
等式 $AC^2 + BD^2 = 2(PR^2 + QS^2)$ …①
を証明しなさい。

［答　　案］

1 （四角形ＡＢＣＤの頂点とＰ，Ｑ，Ｒ，Ｓを座標上に取る）

線分ＢＣの中点Ｑを原点にとり，直線ＢＣをχ軸にとる。
このとき，Ｂ，Ｃの座標は，それぞれ，
Ｂ（－ｃ，０），Ｃ（ｃ，０）
とおくことができる。

また，点Ａの座標を（ａ，ｂ），点Ｄの座標を（ｄ，ｅ）とすると，

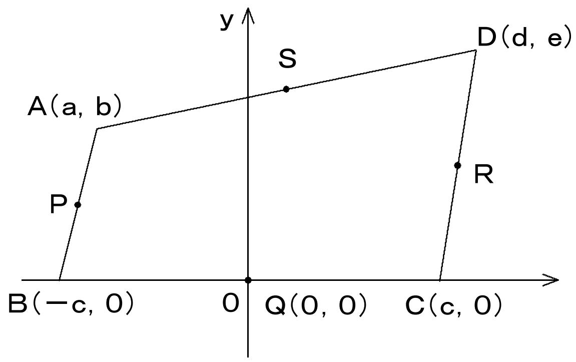
点Ｐの座標は，

点Ｑの座標は，

点Ｒの座標は，

点Ｓの座標は，

とおくことができる。



2 （①の両辺を座標で表す）

◀それぞれの線分の長さの2乗を求める（三平方の定理）

このとき，①の左辺を座標で表すと，

また，①の右辺を座標で表すと，

3 （結論を書く）