２７

第１章　いろいろな式　３・高次方程式
6 高次方程式（その５）
（１／５）■　解の対称式　■

解の対称式―３次方程式の解と係数の関係の応用

◇《解の対称式－３次方程式の解と係数の関係の応用》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

３次方程式$2\chi^3-3\chi^2+4\chi-5=0$の３つの解を$\alpha$，$\beta$，$\gamma$とするとき，次の式の値を求めなさい。
(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　　(3)　$2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

【考え方】**３次方程式の解の対称式の値の求め方**

３次方程式の解と係数の関係を利用するために…

・与式を$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$，$\alpha\beta\gamma$で表す。

・与式が$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)$の形をしているときは，
$a\chi^3+b\chi^2+c\chi+d=a(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)$とおき，$\chi=1$を代入して式を整理する。

(1)　は，$(\alpha+\beta+\gamma)^2$の展開式を利用する。

$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\underbrace{+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha}_{▲+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)}$　より，

$\underline{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

(2)　は，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$を因数分解して，基本対称式で書きかえる。

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$
$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\underbrace{-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha}_{▲-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)})$　より，

$\underline{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}$
$=(\alpha+\beta+\gamma)\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

▼　**３次方程式の解と係数の関係**　▼

３次方程式$a\chi^3+b\chi^2+c\chi+d=0$の３つの解を$\alpha$，$\beta$，$\gamma$とすると，

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$，　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$，　$\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

（次のページへつづく）↗

□□　【高次方程式　No.２７（１／５）】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

［答　　案］

３次方程式　$2\chi^3-3\chi^2+4\chi-5=0$　で，
３次方程式の解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2},\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{4}{2}=2,\qquad \alpha\beta\gamma=\frac{5}{2}$$

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot2$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{16}{4}=\underline{-\frac{7}{4}}$$

(2)　《解１》◀<u>基本対称式で表す方法</u>

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$=\frac{3}{2}\cdot(-\frac{7}{4}-2)+3\cdot\frac{5}{2}$　　◀$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$の値は(1)の結果を利用する。

$=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)+\frac{15}{2}$

$=\underline{\frac{15}{8}}$

(2)　《解２》◀<u>解α，β，γについての等式を利用して，次数を下げる方法</u>

α，β，γは　$2\chi^3-3\chi^2+4\chi-5=0$　の解であるから，

$$\left.\begin{array}{l}2\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha-5=0\text{より，}\ 2\alpha^3=3\alpha^2-4\alpha+5\\ 2\beta^3-3\beta^2+4\beta-5=0\text{より，}\ 2\beta^3=3\beta^2-4\beta+5\\ 2\gamma^3-3\gamma^2+4\gamma-5=0\text{より，}\ 2\gamma^3=3\gamma^2-4\gamma+5\end{array}\right\}\cdots①$$

①の辺々をたして，

$2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-4(\alpha+\beta+\gamma)+15$

$=3\cdot(-\frac{7}{4})-4\cdot\frac{3}{2}+15$

$=-\frac{21}{4}-\frac{12}{2}+15=-\frac{21}{4}-\frac{24}{4}+\frac{60}{4}=\frac{15}{4}$

よって，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\underline{\frac{15}{8}}$

【注】《解２》は，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$　の式の値を求めるときに使うので使えるようにしておきましょう。

(3)　$2\chi^3-3\chi^2+4\chi-5=2(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)$とおく。
これに，$\chi=1$を代入して，

$2\cdot1^3-3\cdot1^2+4\cdot1-5=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

よって，

$2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=\underline{-2}$

２７

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

６ 高次方程式（その５）

（２／５）■　解の対称式　■

◇《解の対称式－３次方程式の解と係数の関係の応用》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

３次方程式 $x^3-3x^2+2x+5=0$ の３つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　　(3)　$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

【考え方】(3)　$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$ は，$-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ として公式を使う。

［答　　案］

３次方程式 $x^3-3x^2+2x+5=0$ で，

３次方程式の解と係数の関係より，

$\alpha+\beta+\gamma=$ ＿＿＿，　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=$ ＿＿＿，　$\alpha\beta\gamma=$ ＿＿＿

★

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=($ ＿＿＿ $)^2-2($ ＿＿＿ $)$　◀公式

$=$　◀基本対称式の値を代入

(2)　《解１》◀<u>基本対称式で表す方法</u>

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=($ ＿＿＿ $)\{$ ＿＿＿ $-($ ＿＿＿ $)\}+$ ＿＿＿

$=$ ＿＿＿　◀ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の値は(1)の結果を利用する。

$=$ ＿＿＿

(2)　《解２》◀<u>解 α，β，γ についての等式を利用して，次数を下げる方法</u>

α，β，γ は $x^3-3x^2+2x+5=0$ の解であるから，

＿＿＿より，$\alpha^3=$ ＿＿＿

＿＿＿より，$\beta^3=$ ＿＿＿　…①

＿＿＿より，$\gamma^3=$ ＿＿＿

①の辺々をたして，

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=$ ＿＿＿

$=$

$=$

よって，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=$ ＿＿＿

（次のページへつづく）↗

□□　【高次方程式　No.２７（２／５）】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(3)　$\chi^3-3\chi^2+2\chi+5=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿ とおく。

これに，$\chi=$ ＿＿＿ を代入して，

＿＿＿＿＿＿＿＿ ＝ ＿＿＿＿＿＿＿＿

よって，

$(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=$ ＿＿＿

｜メニューへ戻る｜

◇《解の対称式－３次方程式の解と係数の関係の応用》学力化➡　　／　，

★演習★【１】

３次方程式 $x^3+2x^2-x+6=0$ の３つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

(3) $\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$

【考え方】(3) $\alpha+\beta+\gamma=k$ より，$\beta+\gamma$ をkと α を使って表す。同様に，$\gamma+\alpha$ をkと β，$\alpha+\beta$ をkと γ を使って表し，式を整理し，対称式を作る。(kの値は予め求めておく。)

［答　案］

３次方程式 $x^3+2x^2-x+6=0$ で，

３次方程式の解と係数の関係より，

____

★

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$ ____________________ ◀公式

$=$ ____________________ ◀基本対称式の値を代入

(2)《解１》◀基本対称式で表す方法

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=$ ____________________ ◀公式

$=$ ____________________ ◀ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ の値は(1)の結果を利用する。

(2)《解２》◀解 α，β，γ についての等式を利用して，次数を下げる方法

α，β，γ は $x^3+2x^2-x+6=0$ の解であるから，

__________ より，$\alpha^3=$ __________

__________ より，$\beta^3=$ __________　…①

__________ より，$\gamma^3=$ __________

①の辺々をたして，

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=$ ____________________

$=$

$=$

よって，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=$ ________

（次のページへつづく）↗

□□　【高次方程式　No.２７（３／５）】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(3)　$\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$　…①

ここで，$\alpha+\beta+\gamma=$ ＿＿＿＿＿ より，

$$\begin{cases} \beta+\gamma= \text{＿＿＿＿＿＿} \\ \gamma+\alpha= \text{＿＿＿＿＿＿} \\ \alpha+\beta= \text{＿＿＿＿＿＿} \end{cases}$$

であるから，これらを①にそれぞれ代入して，

$\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)$

$=$

｜メニューへ戻る｜

◇《解の対称式－３次方程式の解と係数の関係の応用》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

３次方程式 $2x^3-4x^2+3x+1=0$ の３つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(2)　$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　　(3)　$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$

【考え方】(2)は，(3)で $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ の式の値を求めなければならないので，

◀解 α，β，γ についての等式を利用して，次数を下げる方法

で解きます。

［答　　案］

３次方程式 $2x^3-4x^2+3x+1=0$ で，

３次方程式の解と係数の関係より，

★

(1)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$

(2)　《解１》◀基本対称式で表す方法

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=$

(2)　《解２》◀解 α，β，γ についての等式を利用して，次数を下げる方法

α，β，γ は $2x^3-4x^2+3x+1=0$ の解であるから，

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

□□　【高次方程式　No.２７（４／５）】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(3)（2）の①から，それぞれの式の両辺に，それぞれα，β，γをかけて，

◀(2)《解２》と同じ解き方

｜メニューへ戻る｜

◇《解の対称式－３次方程式の解と係数の関係の応用》学力化➡　／　，

★演習★【３】

３次方程式 $x^3-3x^2-2x+7=0$ の３つの解を α，β，γ とするとき，次の式の値を求めなさい。

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$　　(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$　　(4) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$

(5) $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$　　(6) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

【考え方】(1) 通分すれば対称式が現れる。
(2)～(4) はNo.２６（１／５）～（４／５）を参照。
(5) No.２６（１／５）(3) を参照。
(6) No.２６（３／５）(3) を参照。
$\alpha+\beta+\gamma=k$ より，$\beta+\gamma$ を k と α を使って表す。同様に，$\gamma+\alpha$ を k と β，$\alpha+\beta$ を k と γ を使って表し，式を整理し，対称式を作る。（kの値は予め求めておく。）

［答　　案］

３次方程式 $x^3-3x^2-2x+7=0$ で，

３次方程式の解と係数の関係より，

★

(1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=$　　◀通分

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=$

(3) 《解１》◀<u>基本対称式で表す方法</u>

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=$

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

(3)　《解２》◀解α，β，γについての等式を利用して，次数を下げる方法

α，β，γは　$x^3-3x^2-2x+7=0$　の解であるから，

(4)　(3)　の①から，それぞれの式の両辺に，それぞれα，β，γをかけて，

◀(2)《解２》と同じ解き方

(5)　$x^3-3x^2-2x+7=$ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿とおく。

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

□□　【高次方程式　No.２７（５／５）】　－〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

(6)（$\alpha+\beta$）（$\beta+\gamma$）（$\gamma+\alpha$）　…③

ここで，$\alpha+\beta+\gamma=$ ＿＿＿＿ より，