

25

第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式(その3)

(1/4) ■ 3次方程式と虚数解(3) ■

3次方程式と虚数解(3) 一次数を下げる方法

◇ 《3次方程式と虚数解(3) 一次数を下げる方法》 **学力化** → /

★解法の技術★

a, b を実数とする。3次方程式 $x^3 + ax^2 - 5x + b = 0$ の1つの解が $2 + \sqrt{3}i$ であるとき、 a, b の値と他の解を求めよ。

【考え方】 「3次方程式と虚数解」の問題には3通りの解法がある。

【1】 次数を下げる方法 …No.25で学習

【2】 複素数の相等を使った方法 …No.23で学習済み

【3】 3次方程式の解と係数の関係を使った解法 …No.24で学習済み

* ここでは、1つの問題を3つの解法で解いてみよう。



【1】 次数を下げる方法

(解法の全体の流れ)

① 与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる。

◀ 複素数 $a+bi$ が方程式の解になるとき、その共役な複素数 $a-bi$ も解になる。

② (余り) = 0 として x についての恒等式を作り、これから与式の係数の連立方程式を作り、これを解いて a, b の値を求める。

③ a, b を与式に代入し、この3次方程式を解き、 x の値を求める。 ◀ 因数定理を利用

[答 案]

① (与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる) ◀ 2次式でわることで余りが1次式になる ⇔ 次数が下がる

$P(x) = x^3 + ax^2 - 5x + b$ とおく。 ↑ これを使って a, b を求める。

$P(x) = 0$ が実数係数の方程式で、 $2 + \sqrt{3}i$ が $P(x) = 0$ の解だから、その共役複素数 $2 - \sqrt{3}i$ も $P(x) = 0$ の解となる。

したがって、 $P(x)$ は $x - (2 + \sqrt{3}i), x - (2 - \sqrt{3}i)$ を因数にもつので、 $P(x)$ は $\{x - (2 + \sqrt{3}i)\} \{x - (2 - \sqrt{3}i)\} = x^2 - 4x + 7$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r}
 \overline{ x + (a + 4)} \\
 x^2 - 4x + 7 - 5x + b \\
 \underline{x^3 - 4x^2 + 7x} \\
 (a + 4)x^2 - 12x + b \\
 \underline{(a + 4)x^2 - 4(a + 4)x + 7(a + 4)} \\
 4(a + 1)x + (b - 7a - 28) \dots \textcircled{1}
 \end{array}$$

これを使って a, b を求める。



(次のページへつづく) ↗

□ □ 【高次方程式 No. 25 (1/4)】 - (2枚目/4枚)

➡ (前のページからのつづき)

2 (余り)=0として χ についての恒等式を作り,これから与式の係数の連立方程式を作り,これを解いて a, b の値を求める)

①より, (余り)=0とすると, ◀ $4(a+1)\chi + (b-7a-28)=0$ が χ についての恒等式

$$\begin{cases} 4(a+1)=0, \\ b-7a-28=0 \end{cases}$$

これを解いて,

$$a = -1, b = 21$$

3 (因数定理を利用して,他の解を求める)

このとき,与式の方程式は,

$$\chi^3 - \chi^2 - 5\chi + 21 = 0$$

$P(\chi) = \chi^3 - \chi^2 - 5\chi + 21$ とおくと,

$$P(-3) = (-3)^3 - (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 21 = 0$$

となるから, $P(\chi)$ は $\chi + 3$ で割り切れて,

$$P(\chi) = (\chi^2 - 4\chi + 7)(\chi + 3)$$

よって,他の解は, $\chi = 2 - \sqrt{3}i, -3$

▲複素数 $a+bi$ が方程式の解になるとき,その共役な複素数 $a-bi$ も解になる。

◀他の解は次のようにして求めてもよい。

上の筆算で,(余り)=0とすると,

$a = -1$ だから,

$\chi + (a+4) = \chi + 3$ となり,与式は

$\chi + 3$ でわり切れるので,

$P(-3) = \dots$ (左の式へつづく)

4 (答をまとめる)

以上より,

$$a = -1, b = 21, \text{他の解は, } \chi = 2 - \sqrt{3}i, -3$$

▲ $2 + \sqrt{3}i$ は答えに入れないこと!

【2】複素数の相等の利用

(解法の全体の流れ)

1 3次方程式に与えられた解を代入し, $a+bi=0$ の形に整理する。

2 複素数の相等の性質を利用して,与式の係数の連立方程式を作り,これを解いて a, b の値を求める。

3 a, b を与式に代入し,この3次方程式を解き, χ の値を求める。 ◀因数定理の利用

◀複素数 $a+bi$ が方程式の解になるとき,その共役な複素数 $a-bi$ も解になる。

[答 案]

1 (3次方程式に与えられた解を代入し, $a+bi=0$ の形に整理する)

$\chi = 2 + \sqrt{3}i$ がこの方程式の解であるから,これを方程式に代入して,

$$(2 + \sqrt{3}i)^3 + a(2 + \sqrt{3}i)^2 - 5(2 + \sqrt{3}i) + b = 0$$

左辺を展開して整理すると,

$$\begin{aligned} 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}i + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3 \\ + 4a + 4a\sqrt{3}i + a(\sqrt{3}i)^2 - 10 - 5\sqrt{3}i + b = 0 \end{aligned}$$

$$8 + 12\sqrt{3}i - 18 - 3\sqrt{3}i + 4a + 4a\sqrt{3}i - 3a - 10 - 5\sqrt{3}i + b = 0$$

$$(-20 + a + b) + (4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}a)i = 0 \quad \dots \text{①} \quad \leftarrow \text{これを使って, } a, b \text{ を求める。}$$

(次のページへつづく) ➡

□ □ 【高次方程式 No. 25 (1/4)】 - 〈3枚目/4枚〉

➡ (前のページからのつづき)

2 (複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いてa, bの値を求める)

①において、a, bは実数より $-20 + a + b$, $4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}a$ も実数なので、

$$-20 + a + b = 0, \quad 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}a = 0$$

これを解いて、

$$a = -1, \quad b = 21$$

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

} 【1】と同じ

4 (答をまとめる)

【3】3次方程式の解と係数の関係の利用

(解法の全体の流れ)

1 3次方程式の3つの解を、与えられた解、その共役な複素数、および α とする。

◀複素数 $a+bi$ が方程式の解になるとき、その共役な複素数 $a-bi$ も解になる。

2 3次方程式の解と係数の関係を調べる。

3 2より、a, b, α についての連立方程式を作り、これを解いて、a, b, α の値を求める。

[答 案]

1 (3次方程式の3つの解を設定する)

$$x^3 + ax^2 - 5x + b = 0 \text{ について,}$$

$x = 2 + \sqrt{3}i$ が実数を係数とする3次方程式の解であるから、これと共役な複素数 $2 - \sqrt{3}i$ もまた解であるから、3つの解を α , $\beta = 2 + \sqrt{3}i$, $\gamma = 2 - \sqrt{3}i$ とおくと、

▲ α が残る1つの解である。

2 (3次方程式の解と係数の関係を調べる)

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \text{ であるから,}$$

$$\alpha + (2 + \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i) = -\frac{a}{1} \text{ より, } \underline{\alpha + 4 = -a} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \text{ であるから,}$$

$$\alpha(2 + \sqrt{3}i) + (2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) + (2 - \sqrt{3}i)\alpha = \frac{-5}{1} \text{ より,}$$

$$\underline{4\alpha + 7 = -5} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \text{ であるから,}$$

$$\alpha(2 + \sqrt{3}i)(2 - \sqrt{3}i) = -\frac{b}{1} \text{ より, } \underline{7\alpha = -b} \quad \dots \textcircled{3}$$

(次のページへつづく) ➡

□ □ 【高次方程式 No. 25 (1/4)】 - 〈4枚目/4枚〉

➡ (前のページからのつづき)

3 (連立方程式を解いて, a, bの値と他の解の1つを求める)

①, ②, ③を連立して解くと,

$$\text{②より, } 4\alpha = -12 \text{ より, } \alpha = -3 \quad \dots \text{②}'$$

◀ α は残る1つの解

$$\text{②}' \text{を①に代入して, } -3 + 4 = -a \text{ より, } a = -1$$

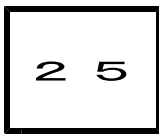
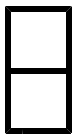
$$\text{②}' \text{を③に代入して, } 7 \times (-3) = -b \text{ より, } b = 21$$

4 (答をまとめる)

よって,

$$\underline{a = -1, \quad b = 21, \quad \text{他の解は, } \chi = 2 - \sqrt{3}i, \quad -3}$$

▲ $2 + \sqrt{3}i$ は答えに入れないこと!



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式(その3)

(2/4) ■ 3次方程式と虚数解(3) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(3) 次数を下げる方法》 **学力化** → /

-----★理解のチェック★-----

a, b を実数とする。3次方程式 $\chi^3 - 2\chi^2 + a\chi + b = 0$ は $\chi = 2+i$ を解にもつとする。このとき, a, b の値と方程式のすべての解を求めよ。 [学習院大]

【1】次数を下げる方法

[答 案]

1 (与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる) ◀2次式でわることで余りが1次式になる ⇔ 次数が下がる

$P(\chi) = \chi^3 - 2\chi^2 + a\chi + b = 0$ とおく。 ↑これを使ってa, bを求める。

$$\begin{array}{r} \chi^3 - 2\chi^2 \\ \hline - 2\chi^2 \\ \hline + a\chi + b \\ \hline + a\chi + b \\ \hline + a\chi + b \\ \hline + a\chi + b \end{array}$$

...① ◀これを使ってa, bを求める。

2 ((余り)=0としてχについての恒等式を作り,これから与式の係数の連立方程式を作り,これを解いてa, bの値を求める)

①より, (余り)=0とすると,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

これを解いて,

a = , b =

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【高次方程式 No. 25 (2 / 4)】 - 〈2枚目 / 3枚〉

➡ (前のページからのつづき)

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

このとき、与式の方程式は、

.....
 $P(x) = \dots\dots\dots$ とおくと、

◀他の解は次のようにして求めてもよい。

上の筆算で、(余り)=0とすると、
 与式は.....でわり切れるので、
 $P(\quad) = \dots$ (左の式へつづく)

よって、解は、 $x = \dots\dots\dots$

▲複素数 $a+bi$ が方程式の解になるとき、その共役な複素数 $a-bi$ も解になる。

4 (答をまとめる)

以上より、

$a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$, 解は、 $x = \dots\dots\dots$

▲すべての解を答える。

【2】複素数の相等の利用

[答 案]

1 (3次方程式に与えられた解を代入し、 $a+bi=0$ の形に整理する)

$x = 2+i$ がこの方程式の解であるから、これを方程式に代入して、

左辺を展開して整理すると、

$(\quad) + (\quad)i = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$

◀これを使ってa, bを求める。

2 (複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いてa, bの値を求める)

①において、 a, b は実数より.....,も実数なので、

..... = 0, = 0

これを解いて、

$a = \dots\dots\dots$, $b = \dots\dots\dots$

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

4 (答をまとめる)

} 【1】と同じ

(次のページへつづく) ➡

□ □ 【高次方程式 No. 25 (2 / 4)】 - 〈3枚目 / 3枚〉

↗ (前のページからのつづき)

【3】 3次方程式の解と係数の関係の利用

[答 案]

1 (3次方程式の3つの解を設定する)

$$x^3 - 2x^2 + ax + b = 0 \text{ について,}$$

$x = 2 + i$ が実数を係数とする3次方程式の解であるから, これと共役な複素数
 もまた解であるから, 3つの解を α , $\beta = 2 + i$, $\gamma = \dots\dots\dots$ とおくと,

▲ α が残る1つの解である。

2 (3次方程式の解と係数の関係を調べる)

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \text{ であるから,}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a} \text{ であるから,}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \text{ であるから,}$$

3 (連立方程式を解いて, a, bの値と他の解の1つを求める)

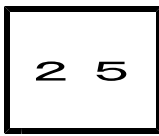
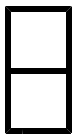
①, ②, ③を連立して解くと,

4 (答をまとめる)

よって,

$$\underline{a = \quad, \quad b = \quad, \quad \text{解は, } x = \quad}$$

▲ すべての解を答える。



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式(その3)

(3/4) ■ 3次方程式と虚数解(3) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(3) - 次数を下げる方法》 **学力化** → /

★演習★【1】

3次方程式 $\chi^3 + a\chi^2 + b\chi + 10 = 0$ の解の1つが $\chi = 2+i$ であるとき、実数の定数 a, b の値と他の解を求めよ。

[山梨学院大]

【1】 次数を下げる方法

[答 案]

1 (与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる)

$P(\chi) = \chi^3 + a\chi^2 + b\chi + 10 = 0$ とおく。

$$\begin{array}{r} \hline) \chi^3 \quad + a\chi^2 \quad + b\chi + 10 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

これを使って a, b を求める。



2 ((余り)=0として χ についての恒等式を作り、これから与式の係数の連立方程式を作り、これを解いて a, b の値を求める)

①より、(余り)=0とすると、

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【高次方程式 No. 25 (3 / 4)】 - 〈2枚目 / 3枚〉

➔ (前のページからのつづき)

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

このとき、与式の方程式は、

4 (答をまとめる)

以上より、

▲ $2+i$ は答えに入れないこと!

【2】複素数の相等の利用

[答 案]

1 (3次方程式に与えられた解を代入し、 $a+bi=0$ の形に整理する)

2 (複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いてa, bの値を求める)

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

4 (答をまとめる)

} 【1】と同じ

(次のページへつづく) ➔

□ □ 【高次方程式 No. 25 (3 / 4)】 - 〈3枚目 / 3枚〉

➔ (前のページからのつづき)

【3】 3次方程式の解と係数の関係の利用

[答 案]

① (3次方程式の3つの解を設定する)

$x^3 + ax^2 + bx + 10 = 0$ について,

② (3次方程式の解と係数の関係を調べる)

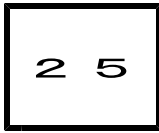
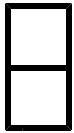
③ (連立方程式を解いて, a, bの値と他の解の1つを求める)

①, ②, ③を連立して解くと,

④ (答をまとめる)

よって,

▲ $2+i$ は答えに入れないこと!



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式(その3)

(4/4) ■ 3次方程式と虚数解(3) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(3) 次数を下げる方法》 **学力化** → /

★演習★【2】

複素数 $3-i$ が3次方程式 $\chi^3 - 4\chi^2 + a\chi + b = 0$ の解となるような実数の定数 a , b の値を求めよ。また、残りの解を求めよ。

【1】 次数を下げる方法

[答 案]

1 (与式をその方程式の2つの複素数の解の積でわる)

$$P(\chi) = \chi^3 - 4\chi^2 + a\chi + b = 0 \text{ とおく。}$$

2 ((余り)=0として χ についての恒等式を作り、これから与式の係数の連立方程式を作り、これを解いて a , b の値を求める)

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【高次方程式 No. 25 (4 / 4)】 - 〈2枚目 / 3枚〉

➔ (前のページからのつづき)

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

4 (答をまとめる)

以上より、

【2】複素数の相等の利用

[答 案]

1 (3次方程式に与えられた解を代入し、 $a+bi=0$ の形に整理する)

2 (複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いて a, b の値を求める)

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

4 (答をまとめる)

} 【1】と同じ

(次のページへつづく) ➔

□ □ 【高次方程式 No. 25 (4 / 4)】 - 〈3枚目 / 3枚〉

➔ (前のページからのつづき)

【3】 3次方程式の解と係数の関係の利用

[答 案]

① (3次方程式の3つの解を設定する)

$x^3 - 4x^2 + ax + b = 0$ について,

② (3次方程式の解と係数の関係を調べる)

③ (連立方程式を解いて, a, bの値と他の解の1つを求める)

①, ②, ③を連立して解くと,

④ (答をまとめる)

よって,
