

3次方程式の解と係数の関係の利用

★知識の整理★

【1】3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $a\chi^3 + b\chi^2 + c\chi + d = 0$ の3つの解を α, β, γ とする。

因数定理から、方程式の左辺は積 $(\chi - \alpha)(\chi - \beta)(\chi - \gamma)$ で割り切れて、

$$a\chi^3 + b\chi^2 + c\chi + d = a(\chi - \alpha)(\chi - \beta)(\chi - \gamma)$$

となる。

この右辺を展開すると、

$$(\text{右辺}) = a\{\chi^3 - (\alpha + \beta + \gamma)\chi^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\chi - \alpha\beta\gamma\}$$

$$= a\chi^3 - a(\alpha + \beta + \gamma)\chi^2 + a(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\chi - a\alpha\beta\gamma$$

これと左辺の各項の係数を比較すると、

$$b = -a(\alpha + \beta + \gamma), \quad c = a(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha), \quad d = -a\alpha\beta\gamma$$

よって、3次方程式 $a\chi^3 + b\chi^2 + c\chi + d = 0$ の3つの解を α, β, γ とすると、次に関係が成り立つ。

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

これを **3次方程式の解と係数の関係** という。



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式(その3)

(2/5) ■ 3次方程式と虚数解(2) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(2) - 3次方程式の解と係数の関係の利用》 **学力化** → /

★解法の技術★

3次方程式 $x^3 - 4x^2 + ax + b = 0$ の1つの解が $1+2i$ であるとき、実数 a 、 b の値を求めなさい。また、他の解を求めなさい。

(解法の全体の流れ)

1 3次方程式の3つの解を、与えられた解、その共役な複素数、および α とする。

◀ 複素数 $a+bi$ が方程式の解になるとき、その共役な複素数 $a-bi$ も解になる。

2 3次方程式の解と係数の関係を調べる。

3 2より、 a 、 b 、 α についての連立方程式を作り、これを解いて、 a 、 b 、 α の値を求める。

[答 案]

1 (3次方程式の3つの解を設定する)

$x^3 - 4x^2 + ax + b = 0$ について、

$x = 1+2i$ が実数を係数とする3次方程式の解であるから、これと共役な複素数 $1-2i$ もまた解であるから、3つの解を α 、 $\beta = 1+2i$ 、 $\gamma = 1-2i$ とおくと、

▲ α が残る1つの解である。

2 (3次方程式の解と係数の関係を調べる)

$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$ であるから、

$$\alpha + (1+2i) + (1-2i) = -\frac{-4}{1} \text{ より、} \underline{\alpha + 2 = 4} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$ であるから、

$$\alpha(1+2i) + (1+2i)(1-2i) + (1-2i)\alpha = \frac{a}{1} \text{ より、} \underline{2\alpha + 5 = a} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$ であるから、

$$\alpha(1+2i)(1-2i) = -\frac{b}{1} \text{ より、} \underline{5\alpha = -b} \quad \cdots \textcircled{3}$$

3 (連立方程式を解いて、 a 、 b の値と他の解の1つを求める)

①、②、③を連立して解くと、

$$\textcircled{1} \text{ より、} \alpha = 2 \quad \cdots \textcircled{1}'$$

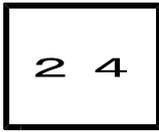
◀ α は残る1つの解

$$\textcircled{1}' \text{ を} \textcircled{2} \text{ に代入して、} 2 \times 2 + 5 = a \text{ より、} a = 9$$

$$\textcircled{1}' \text{ を} \textcircled{3} \text{ に代入して、} 5 \times 2 = -b \text{ より、} b = -10$$

4 (答をまとめる)

よって、 $a = 9$ 、 $b = -10$ 、他の解は、 $x = 1-2i$ 、 2 ◀ $1+2i$ は答えに入れられないこと!



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式(その3)

(3/5) ■ 3次方程式と虚数解(2) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(2) - 3次方程式の解と係数の関係の利用》 **学力化** → /

-----★理解のチェック★-----

3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$ の1つの解が $1+i$ であるとき、実数 a , b の値を求めなさい。また、他の解を求めなさい。

* 「3次方程式の解と係数の関係」を使って解きなさい。

[答 案]

1 (3次方程式の3つの解を設定する)

$$x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$$
 について、

 $x = 1+i$ が実数を係数とする3次方程式の解であるから、これと共役な複素数

 もまた解であるから、3つの解を α , $\beta = \dots\dots\dots$, $\gamma = \dots\dots\dots$ とおくと、
▲ α が残る1つの解である。

2 (3次方程式の解と係数の関係を調べる)

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$
 であるから、

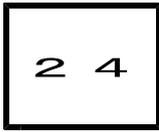
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$
 であるから、

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$
 であるから、
3 (連立方程式を解いて、 a , b の値と他の解の1つを求める)

①, ②, ③を連立して解くと、

4 (答をまとめる)

よって、 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$, 他の解は、 $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ▲ $1+i$ は答えに入れないこと!



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式(その3)

(4/5) ■ 3次方程式と虚数解(2) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(2) - 3次方程式の解と係数の関係の利用》 **学力化** → /

★演習★【1】

3次方程式 $x^3 - ax^2 + bx - b + 1 = 0$ の1つの解が $1 + \sqrt{2}i$ であるとき、実数 a , b の値を求めなさい。また、他の解を求めなさい。

* 「3次方程式の解と係数の関係」を使って解きなさい。

[答 案]

1 (3次方程式の3つの解を設定する)

 $x^3 - ax^2 + bx - b + 1 = 0$ について、

$x = 1 + \sqrt{2}i$ が実数を係数とする3次方程式の解であるから、これと共役な複素数
 もまた解であるから、3つの解を α , $\beta = \dots\dots\dots$, $\gamma = \dots\dots\dots$ とおくと、

▲ α が残る1つの解である。

2 (3次方程式の解と係数の関係を調べる)

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【高次方程式 No. 24 (4 / 5)】 - 〈2枚目 / 2枚〉

↗ (前のページからのつづき)

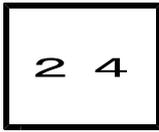
3 (連立方程式を解いて, a , b の値と他の解の1つを求める)

①, ②, ③を連立して解くと,

4 (答をまとめる)

よって, $a =$ _____, $b =$ _____, 他の解は, $x =$ _____

▲ $1 + \sqrt{2}i$ は答えに入れないこと!



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式(その3)

(5/5) ■ 3次方程式と虚数解(2) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(2) - 3次方程式の解と係数の関係の利用》 **学力化** → /

★演習★【2】

実数を係数とする方程式 $x^3 + px + q = 0$ の1つの解が $1 + \sqrt{2}i$ であるとき、実数 p , q の値を求めなさい。また、他の解を求めなさい。

* 「3次方程式の解と係数の関係」を使って解きなさい。

[答 案]

1 (3次方程式の3つの解を設定する)

 $x^3 + px + q = 0$ について、

2 (3次方程式の解と係数の関係を調べる)

3 (連立方程式を解いて、 a , b の値と他の解の1つを求める)

①, ②, ③を連立して解くと、

4 (答をまとめる)

よって、 $p =$ _____ , $q =$ _____ , 他の解は、 $x =$ _____