２４

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

6 高次方程式（その３）

（１／５）■　３次方程式と虚数解(2)　■

３次方程式の解と係数の関係の利用

★知識の整理★

【１】３次方程式の解と係数の関係

３次方程式 $a\chi^3+b\chi^2+c\chi+d=0$ の３つの解を α，β，γ とする。

因数定理から，方程式の左辺は積 $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)$ で割り切れて，

$$a\chi^3+b\chi^2+c\chi+d=a(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)$$

となる。

この右辺を展開すると，

$$(\text{右辺})=a\{\chi^3-(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\chi-\alpha\beta\gamma\}$$

$$=a\chi^3-a(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\chi-a\alpha\beta\gamma$$

これと左辺の各項の係数を比較すると，

$$b=-a(\alpha+\beta+\gamma),\qquad c=a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha),\qquad d=-a\alpha\beta\gamma$$

よって，３次方程式 $a\chi^3+b\chi^2+c\chi+d=0$ の３つの解を α，β，γ とすると，次に関係が成り立つ。

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\qquad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

これを **３次方程式の解と係数の関係** という。

｜メニューへ戻る｜

◇《３次方程式と虚数解(2)－３次方程式の解と係数の関係の利用》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

３次方程式 $\chi^3 - 4\chi^2 + a\chi + b = 0$ の１つの解が $1+2i$ であるとき，実数ａ，ｂの値を求めなさい。また，他の解を求めなさい。

（解法の全体の流れ）

1　３次方程式の３つの解を，与えられた解，その共役な複素数，および α とする。

◀複素数 $a+bi$ が方程式の解になるとき，その共役な複素数 $a-bi$ も解になる。

2　３次方程式の解と係数の関係を調べる。

3　2より，ａ，ｂ，α についての連立方程式を作り，これを解いて，ａ，ｂ，α の値を求める。

［答　　案］

1　（3次方程式の3つの解を設定する）

$\chi^3 - 4\chi^2 + a\chi + b = 0$ について，

$\chi = 1+2i$ が実数を係数とする３次方程式の解であるから，これと共役な複素数 $1-2i$ もまた解であるから，３つの解を α，$\beta = 1+2i$，$\gamma = 1-2i$ とおくと，

▲ α が残る1つの解である。

2　（3次方程式の解と係数の関係を調べる）

$\alpha + \beta + \gamma = -\dfrac{b}{a}$ であるから，

$\alpha + (1+2i) + (1-2i) = -\dfrac{-4}{1}$ より，$\underline{\alpha + 2 = 4}$　…①

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \dfrac{c}{a}$ であるから，

$\alpha(1+2i) + (1+2i)(1-2i) + (1-2i)\alpha = \dfrac{a}{1}$ より，$\underline{2\alpha + 5 = a}$　…②

$\alpha\beta\gamma = -\dfrac{d}{a}$ であるから，

$\alpha(1+2i)(1-2i) = -\dfrac{b}{1}$ より，$\underline{5\alpha = -b}$　…③

3　（連立方程式を解いて，a，bの値と他の解の1つを求める）

①，②，③を連立して解くと，

①より，$\alpha = 2$　…①’　◀ α は残る1つの解

①’を②に代入して，$2 \times 2 + 5 = a$ より，$a = 9$

①’を③に代入して，$5 \times 2 = -b$ より，$b = -10$

4　（答をまとめる）

よって，$\underline{a = 9,\ b = -10，他の解は，\chi = 1-2i,\ 2}$　◀ $1+2i$ は答えに入れないこと！

２４

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

６ 高次方程式（その３）

（３／５）■　３次方程式と虚数解(2)　■

◇《３次方程式と虚数解(2)－３次方程式の解と係数の関係の利用》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

３次方程式$\chi^3+a\chi^2+b\chi+6=0$の１つの解が$1+i$であるとき，実数ａ，ｂの値を求めなさい。また，他の解を求めなさい。

＊「３次方程式の解と係数の関係」を使って解きなさい。

［答　　案］

1 （3次方程式の3つの解を設定する）

$\chi^3+a\chi^2+b\chi+6=0$について，

$\chi=1+i$が実数を係数とする３次方程式の解であるから，これと共役な複素数＿＿＿＿もまた解であるから，３つの解をα，$\beta=$＿＿＿＿，$\gamma=$＿＿＿＿とおくと，

▲αが残る1つの解である。

2 （3次方程式の解と係数の関係を調べる）

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$であるから，

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$であるから，

$\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$であるから，

3 （連立方程式を解いて，a，bの値と他の解の１つを求める）

①，②，③を連立して解くと，

4 （答をまとめる）

よって，ａ＝＿＿＿＿，ｂ＝＿＿＿＿，他の解は，$\chi=$＿＿＿＿＿＿＿＿

▲$1+i$は答えに入れないこと！

｜メニューへ戻る｜

２４

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

６ 高次方程式（その３）

（４／５）■　３次方程式と虚数解(2)　■

◇《３次方程式と虚数解(2)－３次方程式の解と係数の関係の利用》**学力化**➡　　／　，

★演習★【１】

３次方程式 $\chi^3 - a\chi^2 + b\chi - b + 1 = 0$ の１つの解が $1+\sqrt{2}i$ であるとき，実数ａ，ｂの値を求めなさい。また，他の解を求めなさい。

＊「３次方程式の解と係数の関係」を使って解きなさい。

［答　　案］

$\boxed{1}$ （3次方程式の3つの解を設定する）

$\chi^3 - a\chi^2 + b\chi - b + 1 = 0$ について，

$\chi = 1+\sqrt{2}i$ が実数を係数とする３次方程式の解であるから，これと共役な複素数 ＿＿＿＿ もまた解であるから，３つの解を α，$\beta =$ ＿＿＿＿，$\gamma =$ ＿＿＿＿ とおくと，

▲ α が残る1つの解である。

$\boxed{2}$ （3次方程式の解と係数の関係を調べる）

（次のページへつづく）↗

□ □ 【高次方程式 No.２４（４／５）】 －〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

3 （連立方程式を解いて，a，bの値と他の解の１つを求める）

①，②，③を連立して解くと，

4 （答をまとめる）

よって，a＝　　　，b＝　　　，他の解は，χ＝

▲$1+\sqrt{2}i$ は答えに入れないこと！

｜メニューへ戻る｜

２４

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

6 高次方程式（その３）

（５／５）■　３次方程式と虚数解(2)　■

◇《３次方程式と虚数解(2)－３次方程式の解と係数の関係の利用》**学力化**➡　　／　，

★演習★【２】

実数を係数とする方程式$\chi^3 + p\chi + q = 0$の１つの解が$1+\sqrt{2}i$であるとき，実数ｐ，ｑの値を求めなさい。また，他の解を求めなさい。

＊「３次方程式の解と係数の関係」を使って解きなさい。

［答　　案］

1 （3次方程式の3つの解を設定する）

$\chi^3 + p\chi + q = 0$について，

2 （3次方程式の解と係数の関係を調べる）

3 （連立方程式を解いて，a，bの値と他の解の１つを求める）

①，②，③を連立して解くと，

4 （答をまとめる）

よって，ｐ＝　　　　，ｑ＝　　　　，他の解は，χ＝