

## 第1章 いろいろな式 3・高次方程式

## 6 高次方程式(その3)

## (1/4) ■ 3次方程式と虚数解(1) ■

## 複素数の相等の利用

◇ 《3次方程式と虚数解(1)－複素数の相等の利用》 学力化 →

## ★解法の技術★

3次方程式  $\chi^3 + a\chi^2 + b\chi + 5 = 0$  が  $2+i$  を解にもつとき、実数  $a$ ,  $b$  の値を求めなさい。また、他の解を求めなさい。

## (解法の全体の流れ)

- ① 3次方程式に与えられた解を代入し、 $a+bi=0$  の形に整理する。
- ② 複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いて  $a$ ,  $b$  の値を求める。
- ③  $a$ ,  $b$  を与式に代入し、この3次方程式を解き、 $\chi$  の値を求める。 ◀ 因数定理の利用  
◀ 複素数  $a+bi$  が方程式の解になるとき、その共役な複素数  $a-bi$  も解になる。

## [答 案]

- ① (3次方程式に与えられた解を代入し、 $a+bi=0$  の形に整理する)

$\chi = 2+i$  がこの方程式の解であるから、これを方程式に代入して、  
 $(2+i)^3 + a(2+i)^2 + b(2+i) + 5 = 0$

左辺を展開して整理すると、

$$\begin{aligned} 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i + 3 \cdot 2 \cdot i^2 + i^3 + 4a + 4ai + ai^2 + 2b + bi + 5 &= 0 \\ 8 + 12i - 6 - i + 4a + 4ai - a + 2b + bi + 5 &= 0 \\ (7 + 3a + 2b) + (11 + 4a + b)i &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

◀ これを使って  $a$ ,  $b$  を求める。

- ② (複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いて  $a$ ,  $b$  の値を求める)

①において、 $a$ ,  $b$  は実数より  $7 + 3a + 2b$ ,  $11 + 4a + b$  も実数なので、  
 $7 + 3a + 2b = 0$ ,  $11 + 4a + b = 0$

これを解いて、

$$\begin{array}{r} 7 + 3a + 2b = 0 \\ -) 22 + 8a + 2b = 0 \\ \hline -15 - 5a = 0 \\ a = -3 \\ \hline \underline{a = -3, b = 1} \quad \dots \textcircled{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 + 3 \times (-3) + 2b = 0 \\ b = 1 \end{array}$$

(次のページへつづく) →

## □ □ 【高次方程式 No. 23 (1/4)】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

③ (因数定理を利用して、他の解を求める)

このとき、与式の方程式は、

$$x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$$

◀ここからは、No.20と同じプロセスとなる。

 $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$  とおくと、

$$P(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + (-1) + 5 = 0$$

◀(候補)  $\pm 1, \pm 5$ となるから、 $P(x)$  は  $x+1$  で割り切れて、

$$P(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 5) \quad \dots \textcircled{3}$$

$-1$	1	-3	1	5
+		-1	4	-5
	1	-4	5	0

③より、方程式は、

$$(x+1)(x^2 - 4x + 5) = 0$$

となるから、これを解いて、

$$x+1=0 \text{ より, } x=-1$$

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \text{ より,}$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 5}}{1} = 2 \pm i \quad \leftarrow 2+i \text{ が解なので, } 2-i \text{ も解になっている}$$

よって、 $x = -1, 2 \pm i \quad \dots \textcircled{4}$ 

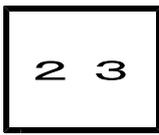
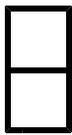
④ (答をまとめる)

したがって、②、④より、

$$\underline{a = -3, \quad b = 1}$$

$$\underline{\text{他の解は, } x = -1, \quad 2-i}$$

◀【注】 $2+i$  は答に入れないこと



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

**6** 高次方程式 (その3)

(2/4) ■ 3次方程式と虚数解(1) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(1)－複素数の相等の利用》 **学力化** → /

★理解のチェック★

3次方程式  $\chi^3 - 4\chi^2 + a\chi + b = 0$  が  $1+i$  を解にもつとき、実数  $a$ 、 $b$  の値を求めなさい。また、他の解を求めなさい。

[答 案]

**1** (3次方程式に与えられた解を代入し、 $a+bi=0$ の形に整理する)

$\chi = 1+i$  がこの方程式の解であるから、これを方程式に代入して、

左辺を展開して整理すると、

.....**①** ◀これを使って  $a$ 、 $b$  を求める。

**2** (複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いて  $a$ 、 $b$  の値を求める)

①において、 $a$ 、 $b$  は実数より .....,  $a$  ..... も実数なので、

..... = 0, ..... = 0

これを解いて、

**a** = \_\_\_\_\_, **b** = \_\_\_\_\_ ...**②**

**3** (因数定理を利用して、他の解を求める)

このとき、与式の方程式は、

..... = 0 ◀ここからは、No.20と同じプロセスとなる。

$P(\chi) = \dots\dots\dots$  とおくと、

$P(\ ) = \dots\dots\dots$  ◀(候補)  $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

となるから、 $P(\chi)$  は ..... で割り切れて、

$P(\chi) = \dots\dots\dots$  ...**③**

+

0
---

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【高次方程式 No. 23 (2/4)】 - 〈2枚目/2枚〉

➔ (前のページからのつづき)

③より, 方程式は,

$$\text{.....} = 0$$

となるから, これを解いて,

◀  $1+i$  が解なので,  $1-i$  も解になっている

よって,  $x = \text{.....}, \text{.....} \dots$  ④

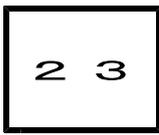
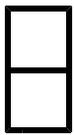
4 (答をまとめる)

したがって, ②, ④より,

$$a = \text{.....}, b = \text{.....}$$

他の解は,  $x = \text{.....}$

◀【注】 $1+i$  は答に入れないこと



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式(その3)

(3/4) ■ 3次方程式と虚数解(1) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(1)－複素数の相等の利用》 **学力化** → /

★演習★【1】

3次方程式  $x^3 + ax + b = 0$  が  $1 + 2i$  を解にもつとき、実数  $a$ 、 $b$  の値を求めなさい。  
また、他の解を求めなさい。

[答 案]

1 (3次方程式に与えられた解を代入し、 $a + bi = 0$ の形に整理する)

2 (複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いて  $a$ 、 $b$  の値を求める)

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

このとき、与式の方程式は、

$$\begin{array}{r} \phantom{+} \\ + \\ \hline \phantom{+} \end{array} \quad \boxed{0}$$

(次のページへつづく) →

□ □ 【高次方程式 No. 23 (3/4)】 - 〈2枚目/2枚〉

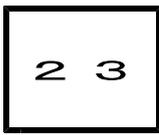
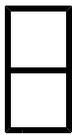
↗ (前のページからのつづき)

4 (答をまとめる)

したがって,

a = \_\_\_\_\_, b = \_\_\_\_\_

他の解は,  $x =$  \_\_\_\_\_



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式(その3)

(4/4) ■ 3次方程式と虚数解(1) ■

◇ 《3次方程式と虚数解(1)－複素数の相等の利用》 **学力化** → /

★演習★【3】

3次方程式  $x^3 - 2x^2 + ax + b = 0$  が  $i$  を解にもつとき、実数  $a$ 、 $b$  の値を求めなさい。また、他の解を求めなさい。

[答 案]

1 (3次方程式に与えられた解を代入し、 $a+bi=0$ の形に整理する)

2 (複素数の相等の性質を利用して、与式の係数の連立方程式を作り、これを解いて  $a$ 、 $b$  の値を求める)

3 (因数定理を利用して、他の解を求める)

このとき、与式の方程式は、

$$\begin{array}{r} \phantom{+} \\ + \phantom{0} \\ \hline 0 \end{array}$$

(次のページへつづく) →

□ □ 【高次方程式 No. 23 (4 / 4)】 - 〈2枚目 / 2枚〉

↗ (前のページからのつづき)

4 (答をまとめる)

したがって,

a = \_\_\_\_\_, b = \_\_\_\_\_

他の解は,  $x =$  \_\_\_\_\_