２２

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

６ 高次方程式（その２）

（１／７）■　１の３乗根　■

１の３乗根

★知識の整理★

【１】１の３乗根

方程式 $\chi^3-1=0$ の解を求めてみよう。

左辺を因数分解して，$(\chi-1)(\chi^2+\chi+1)=0$

したがって，$\chi-1=0$　または　$\chi^2+\chi+1=0$

よって，$\chi=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

上の例では，方程式 $\chi^3=1$ の解，すなわち，３乗して１となる数を求めた。

３乗して１となる数を **１の３乗根** という。

複素数の範囲では，１の３乗根は，次の３つである。

$$1,\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

【２】ω の性質

・３乗して１となる数を１の３乗根といい，そのうち<u>虚数</u>であるものの１つを ω（オメガ）とよぶ。　▲$\omega\neq1$

ω には，以下の性質がある。

$\omega^3=1$

$\omega^2+\omega+1=0$　　＊（証明）$\omega^3=1$ なので，$\omega^3-1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega\neq1$ なので，$\omega^2+\omega+1=0$

【３】ω を用いた計算

ω を用いた計算では

・まず，$\omega^3=1$ を利用して，ω の次数を下げる。

・その後，ω^2 と ω が残った場合は，$\omega^2+\omega+1=0$ を用いて式の値を求める。

｜メニューへ戻る｜

◇《１の３乗根》学力化➡　／　，

★解法の技術★

３乗して１になる数のうち虚数であるものの１つをωとするとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　ω^9　　(2)　$\omega^4+\omega^5$　　(3)　$\omega+\dfrac{1}{\omega}$

【考え方】ωを用いた計算では，

$\boxed{1}$　最初に，$\omega^3=1$を利用して，ωの次数を下げる。

$\boxed{2}$　その後，ω^2とωが残った場合は，$\omega^2+\omega+1=0$を用いて式の値を求める。

$\omega^2+\omega+1=0$より，$\omega^2+\omega=-1$，$\omega^2+1=-\omega$など。

＊指数法則の利用　$2^6=\underline{2\cdot2\cdot2}\times\underline{2\cdot2\cdot2}=2^3\times2^3=(2^3)^2$

$2^6=\underline{2\cdot2}\times\underline{2\cdot2\cdot2\cdot2}=2^2\times2^4$

［答　案］

(1)　ω^9

$=(\omega^3)^3$　◀$\omega^3=1$を使うために，ω^3を作る

$=1^3$　◀ω^3を1に置き換える

$=1$

(2)　$\omega^4+\omega^5$

$=\omega^3\cdot\omega+\omega^3\cdot\omega^2$　◀$\omega^3=1$を使うために，ω^3を作る

$=1\cdot\omega+1\cdot\omega^2$　◀ω^3を1に置き換える

$=\omega+\omega^2$

$=-1$　◀$\omega^2+\omega+1=0$ を使って，式の値を求める

これ以降は教室での学習になります。

２２

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

６ 高次方程式（その２）

（３／７）■　１の３乗根　■

◇《１の３乗根》**学力化**➡　　／　，

★理解のチェック★

３乗して１になる数のうち虚数であるものの１つをωとするとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　ω^{2010}　　(2)　$\omega^2+\omega$　　(3)　$(1+\omega)(1+\omega^2)$

［答　　案］

２２

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

６ 高次方程式（その２）

（４／７）■　１の３乗根　■

◇《１の３乗根》**学力化**➡　　／　，

★演習★【１】

３乗して１になる数のうち虚数であるものの１つをωとするとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　ω^3　　(2)　$\omega^2+\omega^4+\omega^6$　　(3)　$\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega^2}+1$

［答　　案］

２２

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

６ 高次方程式（その２）

（５／７）■　１の３乗根　■

◇《１の３乗根》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

３乗して１になる数のうち虚数であるものの１つをωとするとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　$\omega^6+\omega^3+1$

(2)　$\omega^{2010}+\omega^{2011}+\omega^{2012}$

(3)　$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)$

［答　　案］

２２

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

6 高次方程式（その２）

（６／７）■　１の３乗根　■

◇《１の３乗根》学力化➡　　／　，

★演習★【３】

３乗して１になる数のうち虚数であるものの１つをωとするとき，次の式の値を求めなさい。

(1)　ω^{18}　　(2)　$\omega^{14}+\omega^{7}+1$　　(3)　$\omega^{20}+\omega^{10}$

(4)　$\dfrac{\omega+1}{\omega^{2}}$　　(5)　$\omega^{2}+\dfrac{1}{\omega^{2}}$　　(6)　$\dfrac{\omega^{5}+3\omega+1}{\omega^{2}+1}$

(7)　$(a-b)(a-\omega b)(a-\omega^{2}b)$

【考え方】(7) 最初に，ωのある後ろの２つのかっこを展開する。

［答　　案］

２２

第１章　いろいろな式　３・高次方程式

６　高次方程式（その２）

（７／７）■　１の３乗根　■

◇《１の３乗根／証明》学力化➡　／　，

★演習★【４】

１の３乗根のうち，虚数であるものの１つをωとするとき，次のことを証明しなさい。

(1)　１の３乗根は，１，ω，ω^2である。　(2)　$\omega^2=\overline{\omega}$

(3)　$\omega^3=1$　(4)　$\omega^2+\omega+1=0$

(5)　$\omega^4+\omega^2+1=0$

【考え方】(1)　１の３乗根は３次方程式 $x^3=1$，すなわち，$x^3-1=0$ の解である。この解を求める。No.２３（１／７）★知識の整理★を参照。

(2)　複素数 $\alpha=a+bi$ に対して，虚部の符号を変えた数 $a-bi$ をαと共役な複素数といい，$\overline{\alpha}$で表す。

［答　案］

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とすると，

(1)　◀No.22(1／7)【1】

(2)　$\omega^2=$　◀(1)の計算を参照

(3)　$\omega^3=$

(4)　◀No.22(1／7)【2】を参照

(5)　$\omega^4+\omega^2+1=$

【注】$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ としても，(1)～(5)は同様に成り立つ。