

1の3乗根

★知識の整理★

【1】1の3乗根

方程式 $x^3 - 1 = 0$ の解を求めてみよう。

左辺を因数分解して、 $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

したがって、 $x - 1 = 0$ または $x^2 + x + 1 = 0$

よって、 $x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

上の例では、方程式 $x^3 = 1$ の解、すなわち、3乗して1となる数を求めた。

3乗して1となる数を **1の3乗根** という。

複素数の範囲では、1の3乗根は、次の3つである。

$$1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

【2】 ω の性質

- ・3乗して1となる数を1の3乗根といい、そのうち虚数であるものの1つを ω (オメガ)とよぶ。 ▲ $\omega \neq 1$

ω には、以下の性質がある。

$$\omega^3 = 1$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

* (証明) $\omega^3 = 1$ なので、 $\omega^3 - 1 = 0$

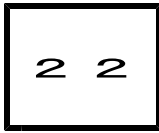
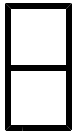
$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$$\omega \neq 1 \text{ なので、} \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

【3】 ω を用いた計算

ω を用いた計算では

- ・まず、 $\omega^3 = 1$ を利用して、 ω の次数を下げる。
- ・その後、 ω^2 と ω が残った場合は、 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を用いて式の値を求める。



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式 (その2)

(2/7) ■ 1の3乗根 ■

◇ 《1の3乗根》 学力化 → /

★解法の技術★

3乗して1になる数のうち虚数であるものの1つを ω とすると、次の式の値を求めなさい。

(1) ω^9

(2) $\omega^4 + \omega^5$

(3) $\omega + \frac{1}{\omega}$

【考え方】 ω を用いた計算では、① 最初に、 $\omega^3 = 1$ を利用して、 ω の次数を下げる。② その後、 ω^2 と ω が残った場合は、 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を用いて式の値を求める。 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ より、 $\omega^2 + \omega = -1$ 、 $\omega^2 + 1 = -\omega$ など。* 指数法則の利用 $2^6 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} \times \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^3 \times 2^3 = (2^3)^2$ $2^6 = \underline{2 \cdot 2} \times \underline{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 2^2 \times 2^4$

[答 案]

(1) ω^9

$= (\omega^3)^3$

◀ $\omega^3 = 1$ を使うために、 ω^3 を作る

$= 1^3$

◀ ω^3 を1に置き換える

$= 1$

(2) $\omega^4 + \omega^5$

$= \omega^3 \cdot \omega + \omega^3 \cdot \omega^2$

◀ $\omega^3 = 1$ を使うために、 ω^3 を作る

$= 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega^2$

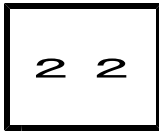
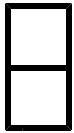
◀ ω^3 を1に置き換える

$= \omega + \omega^2$

$= -1$

◀ $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を使って、式の値を求める

これ以降は教室での学習になります。



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式 (その2)

(3/7) ■ 1の3乗根 ■

◇ 《1の3乗根》 **学力化** → / ,

★理解のチェック★

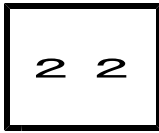
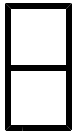
3乗して1になる数のうち虚数であるものの1つを ω とすると、次の式の値を求めなさい。

(1) ω^{2010}

(2) $\omega^2 + \omega$

(3) $(1 + \omega)(1 + \omega^2)$

[答 案]



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式(その2)

(4/7) ■ 1の3乗根 ■

◇ 《1の3乗根》 **学力化** → / ,

★演習★【1】

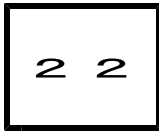
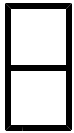
3乗して1になる数のうち虚数であるものの1つを ω とすると、次の式の値を求めなさい。

(1) ω^3

(2) $\omega^2 + \omega^4 + \omega^6$

(3) $\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + 1$

[答 案]



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式 (その2)

(5/7) ■ 1の3乗根 ■

◇ 《1の3乗根》 **学力化** → / ,

★演習★【2】

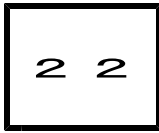
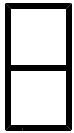
3乗して1になる数のうち虚数であるものの1つを ω とすると、次の式の値を求めなさい。

(1) $\omega^6 + \omega^3 + 1$

(2) $\omega^{2010} + \omega^{2011} + \omega^{2012}$

(3) $(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^5)$

[答 案]



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式 (その2)

(6/7) ■ 1の3乗根 ■

◇ 《1の3乗根》 **学力化** → / ,

★演習★【3】

3乗して1になる数のうち虚数であるものの1つを ω とすると、次の式の値を求めなさい。

(1) ω^{18}

(2) $\omega^{14} + \omega^7 + 1$

(3) $\omega^{20} + \omega^{10}$

(4) $\frac{\omega + 1}{\omega^2}$

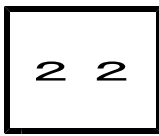
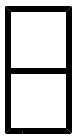
(5) $\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}$

(6) $\frac{\omega^5 + 3\omega + 1}{\omega^2 + 1}$

(7) $(a - b)(a - \omega b)(a - \omega^2 b)$

【考え方】(7) 最初に、 ω のある後ろの2つのかっこを展開する。

[答 案]



第1章 いろいろな式 3・高次方程式

6 高次方程式(その2)

(7/7) ■ 1の3乗根 ■

◇ 《1の3乗根/証明》 **学力化** → /

★演習★【4】

1の3乗根のうち、虚数であるものの1つを ω とすると、次のことを証明しなさい。

- (1) 1の3乗根は、1, ω , ω^2 である。 (2) $\omega^2 = \overline{\omega}$
 (3) $\omega^3 = 1$ (4) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$
 (5) $\omega^4 + \omega^2 + 1 = 0$

【考え方】(1) 1の3乗根は3次方程式 $x^3 = 1$, すなわち, $x^3 - 1 = 0$ の解である。この解を求める。No.23(1/7) ★知識の整理★を参照。

(2) 複素数 $\alpha = a + bi$ に対して、虚部の符号を変えた数 $a - bi$ を α と共役な複素数といい、 $\overline{\alpha}$ で表す。

[答 案]

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ とすると,}$$

(1)

◀No.22(1/7)【1】

(2) $\omega^2 =$

◀(1)の計算を参照

(3) $\omega^3 =$

(4)

◀No.22(1/7)【2】を参照

(5) $\omega^4 + \omega^2 + 1 =$

【注】 $\omega = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ としても、(1)~(5)は同様に成り立つ。