

絶対値を含む不等式

◇ 《絶対値を含む不等式》 **学力化** → /

★解法の技術★

次の不等式を証明しなさい。また、等号が成り立つときを調べなさい。

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

【考え方】 不等式の証明方法の一般原則

不等式 $A \geq B$ が成り立つことを証明するには、 $A - B \geq 0$ を示せばよい。

0以上であることを示すには、次の2つの方法がある。

《1型》条件式利用 } → No.5 (1/6) を参照
 《2型》平方完成

絶対値記号のついた不等式の証明方法

実数 a の絶対値 $|a|$ について、次のことが成り立つ。

① $|a| \geq 0$, ② $|a|^2 = a^2$, ③ $|a||b| = |ab|$

④ $|a| - a \geq 0$ (等号成立は $a \geq 0$ のとき) ←

これを用いて、両辺の2乗の差 ≥ 0 を示せばよい。

(だから、予め各辺が0以上であることを確認しておく必要がある。)

・ $a < 0$ のとき
 $|-2| - (-2) = 2 + 2 = 4$
 0にはならない。
 ・ $a \geq 0$ のとき
 $|-2| - 2 = 2 - 2 = 0$
 必ず0になる。

[答 案]

1 (各辺が0以上であることを示す)

$$|a| + |b| \geq 0, |a + b| \geq 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

◀各辺が0以上であることを示す。

2 (「両辺の2乗の差」 ≥ 0 を示す)

$$(\text{左辺})^2 - (\text{右辺})^2 = (|a| + |b|)^2 - (|a + b|)^2 \quad \leftarrow \text{両辺の2乗の差} \geq 0 \text{を示す。}$$

$$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 - (a + b)^2$$

$$= a^2 + 2|ab| + b^2 - a^2 - 2ab - b^2$$

$$= 2|ab| - 2ab$$

$$= 2(|ab| - ab) \geq 0 \quad \leftarrow \text{不等式の証明《1型》}$$

よって、 $(|a| + |b|)^2 \geq (|a + b|)^2 \quad \dots \textcircled{2}$

3 (1と2をまとめて結論を示す)

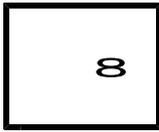
①, ②より、 $|a| + |b| \geq |a + b|$

◀①と②の両方を合わせて結論を示す。

4 (等号成立条件を示す)

また、等号が成り立つのは、 $|ab| - ab = 0$

すなわち、 $ab \geq 0$ のときである。



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その4)

(2/4) ■ 絶対値を含む不等式 ■

◇ 《絶対値を含む不等式》 **学力化** → /

----- ★理解のチェック★ -----

次の不等式を証明しなさい。また、等号が成り立つときを調べなさい。

$$|a| + |b| \geq |a - b|$$

【考え方】 絶対値記号のついた不等式の証明方法

実数 a の絶対値 $|a|$ について、次のことが成り立つ。

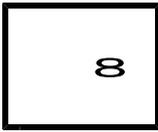
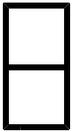
① $|a| \geq 0$, ② $|a|^2 = a^2$, ③ $|a||b| = |ab|$

④ $|a| - a \geq 0$ (等号成立は $a \geq 0$ のとき)

これを用いて、両辺の2乗の差 ≥ 0 を示せばよい。

(だから、予め各辺が0以上であることを確認しておく必要がある。)

[答 案]



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その4)

(3/4) ■ 絶対値を含む不等式 ■

◇ 《絶対値を含む不等式》 **学力化** → /

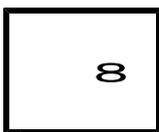
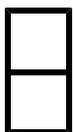
★演習★【1】

次の不等式を証明しなさい。また、(1)は等号が成り立つときを調べなさい。

(1) $|a| + |b| \geq \sqrt{a^2 + b^2}$

(2) $2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}(|a| + |b|)$

[答 案]



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その4)

(4 / 4) ■ 絶対値を含む不等式 ■

◇ 《絶対値を含む不等式》 **学力化** → /

★演習★【2】

次の不等式を証明しなさい。また、(1)は等号が成り立つときを調べなさい。

(1) $|a| + |b| + |c| \geq |a + b + c|$

(2) $5\sqrt{a^2 + b^2} \geq 3|a| + 4|b|$

[答 案]