



相加平均と相乗平均

◇《相加平均と相乗平均》 **学力化** → / .

★知識の整理★

【1】相加平均と相乗平均

2つの数 a, b に対して, $\frac{a+b}{2}$ を a, b の **相加平均** といい, $a > 0, b > 0$ のとき, \sqrt{ab} を a, b の **相乗平均** という。

【2】相加平均と相乗平均の関係

相加平均と相乗平均の関係については, 次の大小関係が成り立つ。

$$a > 0, b > 0 \text{ のとき, } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは, $a = b$ のときである。

[証明]

$a > 0, b > 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{1}{2} (a - 2\sqrt{ab} + b) \\ &= \frac{1}{2} \{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2\} \quad \leftarrow a > 0 \text{ だから, } a = (\sqrt{a})^2 \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

よって, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

また, 等号が成り立つのは, $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, すなわち, $a = b$ のときである。

【注】 上の相加平均と相乗平均の関係は, $a \geq 0, b \geq 0$ のときも成り立つ。

*補足

不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ は, $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ の形で用いられることが多い。



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明(その2)

(2/6) ■ 相加平均と相乗平均 ■

◇《相加平均と相乗平均》**学力化**→ /

★解法の技術★

$a > 0, b > 0$ のとき, 次の不等式を証明しなさい。また, 等号が成り立つときを調べなさい。

(1) $a + \frac{9}{a} \geq 6$

(2) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{9}{b}\right) \geq 16$

【考え方】(1) $a \cdot \frac{9}{a} = 9$ (定数)より, a と $\frac{9}{a}$ に相加平均と相乗平均の関係が使える。

$$a \text{ と } b \text{ について, } a > 0, b > 0 \text{ のとき, } a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

(2) 式を展開すると, 積が定数となる2つの項が現れる。この部分に相加平均と相乗平均の関係が使える。

[答 案]

(1) $a + \frac{9}{a} \geq 6$ の証明

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀正の数である確認は必ず必要

$$a > 0 \text{ より, } \frac{9}{a} > 0 \text{ であるから,}$$

2 (「相加平均 \geq 相乗平均」の式を作り, それを利用して不等式を証明する)

相加平均と相乗平均の大小関係より,

$$(\text{左辺}) = a + \frac{9}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{9}{a}} = 2\sqrt{9} = 6$$

◀ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (等号成立は $a=b$ のとき)

$$\text{よって, } a + \frac{9}{a} \geq 6$$

3 (等号が成り立つ場合を示す)

◀等号が成り立つ場合については, 欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは,

$$a = \frac{9}{a}, \text{ すなわち, } a^2 = 9 \text{ のときであるから,}$$

$$a > 0 \text{ より, } \underline{a = 3} \text{ のときである。}$$

◀両辺の平方根をとった

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【式と証明 No. 6 (2/6)】 - 〈2枚目/2枚〉

➔ (前のページからのつづき)

(2) $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{9}{b} \right) \geq 16$ の証明

0 (左辺を「相加平均 \geq 相乗平均」が使える形に変形する)

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{9}{b} \right) = 1 + \frac{9a}{b} + \frac{b}{a} + 9 \\ &= \underbrace{\frac{9a}{b} + \frac{b}{a}} + 10 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

▲ $\frac{9a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 9$ (定数) より,
 $\frac{9a}{b}$ と $\frac{b}{a}$ に相加平均と相乗平均の関係が使える。

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀ 正の数である確認は必ず必要

$a > 0$, $b > 0$ より, $\frac{9a}{b} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$ であるから,

2 (「相加平均 \geq 相乗平均」の式を作り, それを利用して不等式を証明する)

相加平均と相乗平均の大小関係より,

$$\frac{9a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \sqrt{\frac{9a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \sqrt{9} = 6$$

よって, $\frac{9a}{b} + \frac{b}{a} \geq 6 \quad \dots \textcircled{2}$

②の式の両辺に10を加えて,

◀ ①の式より,

$$\frac{9a}{b} + \frac{b}{a} + 10 \geq 6 + 10 = 16$$

したがって, $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{9}{b} \right) \geq 16$

3 (等号が成り立つ場合を示す)

◀ 等号が成り立つ場合については, 欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは,

$$\frac{9a}{b} = \frac{b}{a}, \text{ すなわち, } 9a^2 = b^2 \text{ のときであるから,}$$

$a > 0$, $b > 0$ より, $3a = b$ のときである。

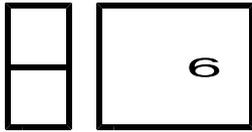
◀ 両辺の平方根をとった

【注】「相加平均・相乗平均の関係」のイメージ図

1 ● > 0 , ▲ > 0

2 ● + ▲ $\geq 2 \sqrt{\bullet \cdot \blacktriangle} = \alpha$ ◀ ● \cdot ▲ は定数

3 等号成立は, ● = ▲ のとき



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その2)

(3/6) ■ 相加平均と相乗平均 ■

◇ 《相加平均と相乗平均》 **学力化** → /

----- ★理解のチェック★ -----

$a > 0$, $b > 0$ のとき, 次の不等式を証明しなさい。また, 等号が成り立つときを調べなさい。

(1) $a + \frac{8}{a} \geq 4\sqrt{2}$

(2) $(a + \frac{1}{b})(4b + \frac{1}{a}) \geq 9$

【考え方】 (2) 相加平均と相乗平均の大小関係が使えるように, 左辺を展開します。

$a + b + 5 \geq 2\sqrt{ab} + 5$ とすることで, 左辺が9以上であることを示すことができます。

[答 案]

(1) $a + \frac{8}{a} \geq 4\sqrt{2}$ の証明

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀ 正の数である確認は必ず必要

2 (「相加平均 \geq 相乗平均」の式を作り, それを利用して不等式を証明する)

相加平均と相乗平均の大小関係より,

3 (等号が成り立つ場合を示す)

◀ 等号が成り立つ場合については, No.6(2/6)を参照

等号が成り立つのは,

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【式と証明 No. 6 (3/6)】 - 〈2枚目/2枚〉

➔ (前のページからのつづき)

(2) $(a + \frac{1}{b})(4b + \frac{1}{a}) \geq 9$ の証明

0 (左辺を「相加平均 \geq 相乗平均」が使える形に変形する)

$$\text{(左辺)} = (a + \frac{1}{b})(4b + \frac{1}{a}) =$$

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀ 正の数である確認は必ず必要

2 (「相加平均 \geq 相乗平均」の式を作り, それを利用して不等式を証明する)

相加平均と相乗平均の大小関係より,

3 (等号が成り立つ場合を示す)

◀ 等号が成り立つ場合については, 欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは,



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明(その2)

(4/6) ■ 相加平均と相乗平均 ■

◇《相加平均と相乗平均》**学力化**→ /

★演習★【1】

 $a > 0, b > 0$ のとき, 次の不等式を証明しなさい。

(1) $2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2}$

(2) $a + b + \frac{1}{a+b} \geq 2$

(3) $(1 + \frac{b}{a})(1 + \frac{a}{b}) \geq 4$

【考え方】(3) 相加平均と相乗平均の大小関係が使えるように, 左辺を展開します。

$$a + b + 2 \geq 2\sqrt{ab} + 2$$
 とすることで, 左辺が4以上であることを示すことができます。

【注】証明のみ。等号成立条件不要。

[答 案] <旧版フォレスト数学Ⅱ 1-11 Exercise【1】>

(1) $2a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{2}$ の証明

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀正の数である確認は必ず必要

2 (「相加平均 \geq 相乗平均」の式を作り, それを利用して不等式を証明する)

相加平均と相乗平均の大小関係より,

(等号成立は $a=b$ のとき)

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【式と証明 No. 6 (4 / 6)】 - 〈2枚目 / 2枚〉

➔ (前のページからのつづき)

(2) $a + b + \frac{1}{a+b} \geq 2$ の証明

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀ 正の数である確認は必ず必要

2 (「相加平均 \geq 相乗平均」の式を作り, それを利用して不等式を証明する)

相加平均と相乗平均の大小関係より,

(3) $(1 + \frac{b}{a})(1 + \frac{a}{b}) \geq 4$ の証明

0 (左式を「相加平均 \geq 相乗平均」が使える形に変形する)

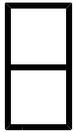
(左辺) $= (1 + \frac{b}{a})(1 + \frac{a}{b}) =$

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀ 正の数である確認は必ず必要

2 (「相加平均 \geq 相乗平均」の式を作り, それを利用して不等式を証明する)

相加平均と相乗平均の大小関係より,



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その2)

(5/6) ■ 相加平均と相乗平均 ■

◇ 《相加平均と相乗平均》 **学力化** → /

★演習★【2】

$a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ のとき, 次の不等式を証明しなさい。また, 等号が成り立つ場合を調べなさい。

(1) $\left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \geq 4$

(2) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right) \geq 9$

[答 案]

(1) $\left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \geq 4$ の証明

0 (左辺を「相加平均 \geq 相乗平均」が使える形に変形する)

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀ 正の数である確認は必ず必要

2 (「相加平均 \geq 相乗平均」の式を作り, それを利用して不等式を証明する)

相加平均と相乗平均の大小関係より,

3 (等号が成り立つ場合を示す)

◀ 等号が成り立つ場合については, 欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは,

(次のページへつづく) →

□ □ 【式と証明 No. 6 (5/6)】 - 〈2枚目/2枚〉

➔ (前のページからのつづき)

(2) $(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) \geq 9$ の証明

0 (左辺を「相加平均 \geq 相乗平均」が使える形に変形する)

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀ 正の数である確認は必ず必要

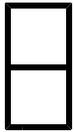
2 (「相加平均 \geq 相乗平均」の式を作り, それを利用して不等式を証明する)

相加平均と相乗平均の大小関係より,

3 (等号が成り立つ場合を示す)

◀ 等号が成り立つ場合については, 欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは,



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その2)

(6 / 6) ■ 相加平均と相乗平均 ■

◇ 《相加平均と相乗平均》 **学力化** → /

★演習★【3】

次の問いに答えなさい。

(1) $a \neq 0$ のとき、次の不等式を証明しなさい。

$$a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$$

(2) $x > 0$ のとき、 $x + \frac{4}{x}$ の最小値を求めなさい。また、そのときの x を求めなさい。【考え方】 (2) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ のとき、 $a + b$ の最小値は $2\sqrt{ab}$ になります。このとき、 $a = b$ という関係が成り立ちます。(等号が成り立つ場合)

[答 案]

(1) $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 2$ の証明

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀ 正の数である確認は必ず必要

2 (「相加平均 \geq 相乗平均」の式を作り、それを利用して不等式を証明する)

相加平均と相乗平均の大小関係より、

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【式と証明 No. 6 (6 / 6)】 - 〈2枚目 / 2枚〉

↗ (前のページからのつづき)

(2) $x + \frac{4}{x}$ の最小値

1 (加える2式のそれぞれが正であることを確認)

◀ 正の数である確認は必ず必要

2 (「相加平均 \geq 相乗平均」の式を作り, それを利用して最小値を求める)

相加平均と相乗平均の大小関係より,

3 (等号が成り立つ場合を示す)

◀ 等号が成り立つ場合については, 欄外の【注】を参照

等号が成り立つのは,