

第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その1)

(1/7) ■ 不等式の証明 ■

不等式の証明

★知識の整理★

【1】不等式の証明方法

不等式 $A \geq B$ が成り立つことを証明するには、 $A - B \geq 0$ を示せばよい。

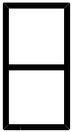
0以上であることを示すには、次の2つの方法がある。

《1型》条件式利用

「 $x > y$ のとき、…」という条件があるときは、 $x - y > 0$ を使って0より大きいことを示す。

《2型》平方完成

$$\begin{aligned}
 & \underline{a^2 - 4ab + 7b^2} \\
 & \downarrow \text{平方完成} \\
 & = \underline{a^2 - 4ab + 4b^2} - 4b^2 + 7b^2 \\
 & = (a - 2b)^2 + 3b^2 \geq 0 \qquad \blacktriangleleft (\text{実数})^2 \text{ は常に0または正の値をとる。}
 \end{aligned}$$



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その1)

(2/7) ■ 不等式の証明 ■

◇ 《不等式の証明》 学力化 → /

★解法の技術★

次の不等式を証明しなさい。また、(2)は等号が成り立つときを調べなさい。

(1) $x > y$ のとき, $3x + 4y > 2x + 5y$

(2) $a^2 + 7b^2 \geq 4ab$

【考え方】 (1) 《1型》, (2) 《2型》で証明します。

[答 案]

$$(1) \text{ (左辺)} - \text{(右辺)} = (3x + 4y) - (2x + 5y) \quad \leftarrow \langle \text{《1型》} \rangle$$

$$= x - y$$

ここで, $x > y$ より, $x - y > 0$ であるから, ◀ 条件式の利用

$$(3x + 4y) - (2x + 5y) > 0$$

よって, $3x + 4y > 2x + 5y$

$$(2) \text{ (左辺)} - \text{(右辺)} = (a^2 + 7b^2) - (4ab) \quad \leftarrow \langle \text{《2型》} \rangle$$

$$= \underbrace{a^2 - 4ab + 4b^2}_{(a-2b)^2} - 4b^2 + 7b^2 \quad \leftarrow \text{平方完成}$$

$$= (a - 2b)^2 + 3b^2$$

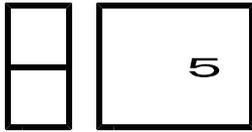
ここで, $(a - 2b)^2 \geq 0$, $3b^2 \geq 0$ より, $(a - 2b)^2 + 3b^2 \geq 0$ であるから,

$$(a^2 + 7b^2) - (4ab) \geq 0$$

よって, $a^2 + 7b^2 \geq 4ab$ また, 等号が成り立つのは, $a - 2b = 0$ かつ $b = 0$

$$a - 2 \times (0) = 0 \quad \text{より} \quad a = 0$$

すなわち, $a = b = 0$ のときである。



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その1)

(3/7) ■ 不等式の証明 ■

◇ 《不等式の証明》 **学力化** → / ,

----- ★理解のチェック★ -----

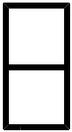
次の不等式を証明しなさい。また、(2)は等号が成り立つときを調べなさい。

(1) $x > y$ のとき, $4x + y > 2x + 3y$

(2) $x^2 + 2xy \geq -2y^2$

【考え方】 (1) 《1型》, (2) 《2型》で証明します。

[答 案]



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その1)

(4/7) ■ 不等式の証明 ■

◇ 《不等式の証明》 **学力化** → / ,

★演習★【1】

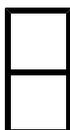
次の不等式を証明しなさい。また、(1)は等号が成り立つときを調べなさい。

(1) $a^2 + ab + 3b^2 \geq 3ab$

(2) $9x^2 > 6x - 2$

【考え方】(1)(2)の両方とも《2型》で証明します。

[答 案]



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その1)

(5/7) ■ 不等式の証明 ■

◇ 《不等式の証明》 **学力化** → / ,

★演習★【2】

次の不等式を証明しなさい。また、(2)は等号が成り立つときを調べなさい。

(1) $a > b, c > d$ のとき, $ac + bd > ad + bc$

(2) $x^2 + y^2 \geq 2(x + y - 1)$

【考え方】(1) 《1型》, (2) 《2型》で証明します。

[答 案]



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その1)

(6/7) ■ 不等式の証明 ■

◇ 《不等式の証明》 **学力化** → / ,

★演習★【3】

a, b, x, y はすべて正の数で, $\frac{x}{a} < \frac{y}{b}$ とするとき, 次の不等式を証明しなさい。

(1) $ay - bx > 0$

(2) $\frac{x}{a} < \frac{x+y}{a+b} < \frac{y}{b}$

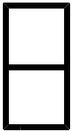
【考え方】 (1) 《1型》で証明します。

(2) 《1型》で証明しますが, (1)の結果も利用します。

最初に前の2項の大小関係を証明し, 次に後の2項の大小関係を証明します。

2つの証明を合わせて, 問題全体の証明になります。

[答 案]



第1章 いろいろな式 2・式と証明

3 不等式の証明 (その1)

(7/7) ■ 不等式の証明 ■

◇ 《不等式の証明》 **学力化** → / ,

★演習★【4】

次の不等式を証明しなさい。また、等号が成り立つ場合を調べなさい。

(1) $a^2 - 2(b-1)a + 2(b-1)^2 \geq 0$

(2) $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

【考え方】(1)(2)の両方とも《2型》で証明します。

[答 案]