第１章　いろいろな式　２・式と証明
5
3 不等式の証明（その１）
（１／７）■　不等式の証明　■

不等式の証明

★知識の整理★

【１】不等式の証明方法

不等式　Ａ≧Ｂ　が成り立つことを証明するには，Ａ－Ｂ≧０　を示せばよい。

０以上であることを示すには，次の２つの方法がある。

《１型》条件式利用

「$\chi>y$ のとき，…」という条件があるときは，
$\chi-y>0$ を使って０より大きいことを示す。

《２型》平方完成

$a^2-4ab+7b^2$
⬇ 平方完成
$=a^2-4ab+4b^2-4b^2+7b^2$
$=(a-2b)^2+3b^2\geqq 0$　　◀ $(\text{実数})^2$ は常に０または正の値をとる。

｜メニューへ戻る｜

◇《不等式の証明》**学力化**➡　　／　，

★解法の技術★

次の不等式を証明しなさい。また，(2)は等号が成り立つときを調べなさい。

(1)　$\chi > y$ のとき，$3\chi + 4y > 2\chi + 5y$

(2)　$a^2 + 7b^2 \geqq 4ab$

【考え方】(1)　《１型》，(2)　《２型》で証明します。

［答　　案］

(1)　(左辺)－(右辺)$=(3\chi+4y)-(2\chi+5y)$　　◀《１型》

$=\chi-y$

ここで，$\chi>y$ より，$\chi-y>0$ であるから，　　◀条件式の利用

$(3\chi+4y)-(2\chi+5y)>0$

よって，$3\chi+4y>2\chi+5y$

(2)　(左辺)－(右辺)$=(a^2+7b^2)-(4ab)$　　◀《２型》

$=a^2-4ab+4b^2-4b^2+7b^2$　　◀平方完成

$=(a-2b)^2+3b^2$

ここで，$(a-2b)^2 \geqq 0$，$3b^2 \geqq 0$ より，$(a-2b)^2+3b^2 \geqq 0$ であるから，

$(a^2+7b^2)-(4ab) \geqq 0$

よって，$a^2+7b^2 \geqq 4ab$

また，等号が成り立つのは，$a-2b=0$　かつ　$b=0$

$a-2\times(0)=0$　より　$a=0$

すなわち，$a=b=0$　のときである。

｜メニューへ戻る｜

第１章　いろいろな式　２・式と証明

3 不等式の証明（その１）

（３／７）■　不等式の証明　■

◇《不等式の証明》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

次の不等式を証明しなさい。また，(2)は等号が成り立つときを調べなさい。

(1)　$x > y$ のとき，$4x + y > 2x + 3y$

(2)　$x^2 + 2xy \geqq -2y^2$

【考え方】(1)　《１型》，(2)　《２型》で証明します。

［答　　案］

5

第１章　いろいろな式　２・式と証明
3 不等式の証明（その１）
（４／７）■　不等式の証明　■

◇《不等式の証明》**学力化**➡　／　,

★演習★【１】

次の不等式を証明しなさい。また，(1)は等号が成り立つときを調べなさい。

(1)　$a^2+ab+3b^2 \geqq 3ab$

(2)　$9\chi^2 > 6\chi - 2$

【考え方】(1)（2）の両方とも《２型》で証明します。

［答　　案］

5

第１章　いろいろな式　２・式と証明
３ 不等式の証明（その１）
（５／７）■　不等式の証明　■

◇《不等式の証明》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

次の不等式を証明しなさい。また，(2)は等号が成り立つときを調べなさい。

(1)　$a > b$，$c > d$ のとき，$ac + bd > ad + bc$

(2)　$\chi^2 + y^2 \geqq 2(\chi + y - 1)$

【考え方】(1)　《１型》，(2)　《２型》で証明します。

［答　　案］

｜メニューへ戻る｜

◇《不等式の証明》学力化➡　　／　，

★演習★【３】

ａ，ｂ，χ，ｙはすべて正の数で，$\dfrac{\chi}{a}<\dfrac{y}{b}$ とするとき，次の不等式を証明しなさい。

(1)　$ay-b\chi>0$

(2)　$\dfrac{\chi}{a}<\dfrac{\chi+y}{a+b}<\dfrac{y}{b}$

【考え方】(1)　《１型》で証明します。

(2)　《１型》で証明しますが，(1)　の結果も利用します。
最初に前の２項の大小関係を証明し，次に後の２項の大小関係を証明します。
２つの証明を合わせて，問題全体の証明になります。

［答　　案］

5

第１章　いろいろな式　２・式と証明

3 不等式の証明（その１）

（７／７）■　不等式の証明　■

◇《不等式の証明》**学力化**➡　　／　，

★演習★【４】

次の不等式を証明しなさい。また，等号が成り立つ場合を調べなさい。

(1)　$a^2-2(b-1)a+2(b-1)^2\geqq 0$

(2)　$(a\chi+by)^2\leqq(a^2+b^2)(\chi^2+y^2)$

【考え方】(1)(2) の両方とも《２型》で証明します。

［答　　案］