

1 8

第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

4 二項定理(その3)

(1/3) ■ 二項定理の応用④ ■

nで割ったときの余りと二項定理

◇ 《nで割ったときの余りと二項定理》 学力化 → /

★解法の技術★

29⁵¹を900で割ったときの余りを求めなさい。

【考え方】(割られる数)=(割る数)×(商)+(余り)であるから、29⁵¹を900で割ったときの商をM、余りをrとすると、

$$\text{等式 } 29^{51} = 900M + r \quad (M \text{ は整数}, 0 \leq r < 900)$$

が成り立つ。

29⁵¹=(30-1)⁵¹であるから、二項定理を利用して、(30-1)⁵¹を900M+rの形に変形すればよい。

[答 案]

1 (二項定理を利用して式を展開する)

$$29^{51} = (30 - 1)^{51}$$

$$= \{ {}_{51}C_0 \cdot (30)^{51} \cdot (-1)^0 + {}_{51}C_1 \cdot (30)^{50} \cdot (-1)^1 + \dots + {}_{51}C_{49} \cdot (30)^2 \cdot (-1)^{49} \}$$

◀ 因数900を含む項

$$+ \underbrace{{}_{51}C_{50} \cdot (30)^1 \cdot (-1)^{50} + {}_{51}C_{51} \cdot (30)^0 \cdot (-1)^{51}}$$

$$= (30^{51} - {}_{51}C_1 \cdot 30^{50} + \dots - {}_{51}C_{49} \cdot 30^2)$$

◀ 因数900を含む項

$$+ \underbrace{{}_{51}C_{50} \cdot 30^1 - {}_{51}C_{51} \cdot 30^0}$$

2 (900M+rの形へ変形する)

$$= 30^2(30^{49} - {}_{51}C_1 \cdot 30^{48} + \dots - {}_{51}C_{49} \cdot 1)$$

◀ 因数900を含む項

$$+ \underbrace{1530 - 1}$$

◀ 1530=900+630

$$= 900(30^{49} - {}_{51}C_1 \cdot 30^{48} + \dots - {}_{51}C_{49})$$

◀ 因数900を含む項

$$+ \underbrace{900 + 629}$$

◀ 【注】

$$= 900(30^{49} - {}_{51}C_1 \cdot 30^{48} + \dots - {}_{51}C_{49} + 1)$$

◀ 因数900を含む項

$$+ 629$$

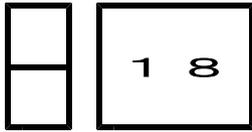
3 (答を書く)

ここで、(30⁴⁹-₅₁C₁・30⁴⁸+…-₅₁C₄₉+1)は整数であるから、29⁵¹を900で割った余りは 629 である

【補足】 *上の式で、900のつまり30²を含む項をまとめて{ }や()で囲んであります。

(=900の倍数の項)

【注】30²を含まない項でも、計算して900の倍数が現れたら、900で括り出しておきます。(上の式の下線~~~~~のイタリック体の数字の部分)



第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

4 二項定理（その3）

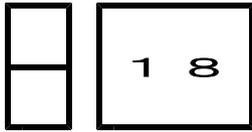
（2 / 3） ■ 二項定理の応用④ ■

◇ 《nで割ったときの余りと二項定理》 **学力化** → / ,

★理解のチェック★

21²¹を400で割ったときの余りを求めなさい。

[答 案]



第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

4 二項定理（その3）

（3 / 3） ■ 二項定理の応用④ ■

◇ 《nで割ったときの余りと二項定理》 **学力化** → / ,

★演習★【1】

11^{11} を100で割ったときの余りを二項定理を用いて求めなさい。

[答 案]