

1 6

## 第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

## 4 二項定理（その3）

## (1/4) ■ 二項定理の応用② ■

## 等式の証明

## ★解法の技術★

$(1+x)^n$  の展開式を利用して、次の等式を証明しなさい。

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$$

【考え方】二項定理を利用する証明問題は、

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$$

が与えられた式になるように、 $x$  に数を代入する。

[答 案]

二項定理を用いて  $(1+x)^n$  を展開すると、

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$$

この式に  $x=1$  を代入すると、

$$(1+1)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 \cdot 1 + {}_nC_2 \cdot 1^2 + \cdots + {}_nC_n \cdot 1^n$$

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$$

したがって、与えられた等式は成立する。

◀  $(1+x)^n = 2^n$  にするために、 $x=1$  を代入する

◇ 《等式の証明》 学力化 → / ,

----- ★理解のチェック★ -----

$(1+x)^n$  の展開式を利用して、次の等式を証明しなさい。

$${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$$

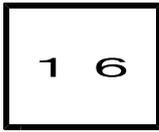
[答 案]

二項定理を用いて  $(1+x)^n$  を展開すると、

$$(1+x)^n =$$

この式に  $x = [ \quad ]$  を代入すると、 ◀  $(1+x)^n = [ \quad ]$  にするために、 $x = [ \quad ]$  を代入する

したがって、与えられた等式は成立する。



第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

**4** 二項定理（その3）

(2/4) ■ 二項定理の応用② ■

◇ 《等式の証明》 **学力化** → / ,

★演習★【1】

(1 + x)<sup>n</sup> の展開式を利用して、次の等式を証明しなさい。

$${}_n C_0 + 2 {}_n C_1 + 2^2 {}_n C_2 + \dots + 2^n {}_n C_n = 3^n$$

[答 案]

二項定理を用いて(1 + x)<sup>n</sup> を展開すると、

$$(1 + x)^n =$$

この式に x = [ ] を代入すると、 ◀(1 + x)<sup>n</sup> = [ ]にするために、x = [ ]を代入する

したがって、与えられた等式は成立する。

◇ 《等式の証明》 **学力化** → / ,

★演習★【2】

二項定理を利用して、次の等式を証明しなさい。

$${}_n C_0 - \frac{{}_n C_1}{2} + \frac{{}_n C_2}{2^2} - \dots + (-1)^n \frac{{}_n C_n}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

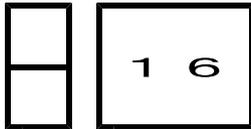
[答 案]

二項定理を用いて(1 + x)<sup>n</sup> を展開すると、

$$(1 + x)^n =$$

この式に x = [ ] を代入すると、 ◀考え方は(1/4)を参照

したがって、与えられた等式は成立する。



第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

4 二項定理(その3)

(3/4) ■ 二項定理の応用② ■

◇《等式の証明》**学力化**→ / ,

★演習★【3】

二項定理を利用して、次の等式を導きなさい。

$$2^n {}_n C_0 - 2^{n-1} {}_n C_1 + 2^{n-2} {}_n C_2 + \dots + (-1)^n {}_n C_n = 1$$

【考え方】二項定理を利用して、 $(1+x)^n$ を展開すると、

$$(1+x)^n = {}_n C_0 \cdot 1^n \cdot x^0 + {}_n C_1 \cdot 1^{n-1} x^1 + \dots$$

$(1+x)^n = 1$ にするために、 $x=0$ を代入して…

$$(1+0)^n = {}_n C_0 \cdot 1^n \cdot 0^0 + {}_n C_1 \cdot 1^{n-1} 0^1 + \dots$$

$$1 = \underline{1} {}_n C_0 + {}_n C_1 + \dots$$

↑  $2^n$ の項が出てこない。よって、証明不可!

$2^n$ の項が出てくればいいのだから、

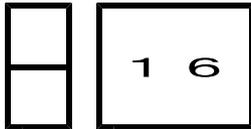
$(2+x)^n = \sim$  の二項定理を作って、これを利用する。

[答 案]

$$(2+x)^n =$$

この式に  $x = [ \quad ]$  を代入すると、 ◀  $(2+x)^n = [ \quad ]$  にするために、 $x = [ \quad ]$  を代入する

したがって、与えられた等式は成立する。



第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

**4** 二項定理（その3）

（4 / 4） ■ 二項定理の応用② ■

◇ 《等式の証明》 **学力化** → / ,

★演習★【4】

二項定理を利用して、次の等式を証明しなさい。

$n$  が奇数のとき

$${}_nC_0 + {}_nC_2 + \dots + {}_nC_{n-1} = {}_nC_1 + {}_nC_3 + \dots + {}_nC_n$$

【考え方】これまで、右辺が(数)<sup>n</sup>、または数の場合について、二項定理を利用して証明してきたが、この問題はその形をとっていない。

その形をとっていないなら、その従来形をとるように式を変形すればよい。（自分のペースにもってきて証明する。）

すなわち、右辺の項をすべて、左辺へ移項し、左辺=0の形にしてから、二項定理を利用して証明すればよい。

条件「 $n$  が奇数のとき」の使い方： $(-1)^{n-1} = 1$ 、 $(-1)^n = -1$

[答 案]

与式の右辺の項をすべて左辺へ移項して、

二項定理を用いて $(1+x)^n$ を展開すると、

$$(1+x)^n =$$

この式に $x = [ \quad ]$ を代入すると、 $\leftarrow (1+x)^n = [ \quad ]$ にするために、 $x = [ \quad ]$ を代入する

$n$  が奇数だから、 $(-1)^{n-1} = [ \quad ]$ 、 $(-1)^n = [ \quad ]$

よって、

したがって、 $n$

であるから、与えられた等式は成立する。