１６

第１章　いろいろな式　１・整式の乗法・除法と分数式

4　二項定理（その３）

（１／４）■　二項定理の応用②　■

等式の証明

★解法の技術★

$(1+x)^n$ の展開式を利用して，次の等式を証明しなさい。

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$

【考え方】二項定理を利用する証明問題は，

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$

が与えられた式になるように，x に数を代入する。

［答　　案］

二項定理を用いて $(1+x)^n$ を展開すると，

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$

この式に $x=1$ を代入すると，　◀$(1+x)^n=2^n$ にするために，$x=1$ を代入する

$(1+1)^n={}_nC_0+{}_nC_1\cdot1+{}_nC_2\cdot1^2+\cdots+{}_nC_n\cdot1^n$

$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n$

したがって，与えられた等式は成立する。

◇《等式の証明》 学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

$(1+x)^n$ の展開式を利用して，次の等式を証明しなさい。

${}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^n{}_nC_n=0$

［答　　案］

二項定理を用いて $(1+x)^n$ を展開すると，

$(1+x)^n=$

この式に $x=$［　　　　］を代入すると，　◀$(1+x)^n=$［　　］にするために，$x=$［　　］を代入する

したがって，与えられた等式は成立する。

１６

第１章　いろいろな式　１・整式の乗法・除法と分数式
４　二項定理（その３）
（２／４）■　二項定理の応用②　■

◇《等式の証明》学力化➡　　／　，

★演習★【１】

$(1+x)^n$ の展開式を利用して，次の等式を証明しなさい。

$${}_nC_0+2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+\cdots+2^n{}_nC_n=3^n$$

［答　　案］

二項定理を用いて $(1+x)^n$ を展開すると，

$(1+x)^n=$

この式に $x=$［　　　　］を代入すると，　◀ $(1+x)^n=$［　　］にするために，$x=$［　　　］を代入する

したがって，与えられた等式は成立する。

◇《等式の証明》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

二項定理を利用して，次の等式を証明しなさい。

$${}_nC_0-\frac{{}_nC_1}{2}+\frac{{}_nC_2}{2^2}-\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

［答　　案］

二項定理を用いて $(1+x)^n$ を展開すると，

$(1+x)^n=$

この式に $x=$［　　　　］を代入すると，　◀考え方は（１／４）を参照

したがって，与えられた等式は成立する。

１６

第１章　いろいろな式　１・整式の乗法・除法と分数式

４ 二項定理（その３）

（３／４）■　二項定理の応用②　■

◇《等式の証明》**学力化**➡　　／　，

★演習★【３】

二項定理を利用して，次の等式を導きなさい。

$2^n {}_nC_0 - 2^{n-1} {}_nC_1 + 2^{n-2} {}_nC_2 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 1$

【考え方】二項定理を利用して，$(1+\chi)^n$ を展開すると，

$(1+\chi)^n = {}_nC_0 \cdot 1^n \cdot \chi^0 + {}_nC_1 \cdot 1^{n-1} \chi^1 + \cdots$

$(1+\chi)^n = 1$ にするために，$\chi = 0$ を代入して…

$(1+0)^n = {}_nC_0 \cdot 1^n \cdot 0^0 + {}_nC_1 \cdot 1^{n-1} 0^1 + \cdots$

$1 = 1^n {}_nC_0 + {}_n 1^{n-1} C_1 + \cdots$

⬆ 2^n の項が出てこない。よって，証明不可！

2^n の項が出てくればいいのだから，

$(2+\chi)^n =$ ～　の二項定理を作って，これを利用する。

［答　　案］

$(2+\chi)^n =$

この式に $\chi =$ ［　　　　］を代入すると，　　◀ $(2+\chi)^n =$［　　］にするために，$\chi =$［　　　］を代入する

したがって，与えられた等式は成立する。

１６

第１章　いろいろな式　１・整式の乗法・除法と分数式

4 二項定理（その３）

（４／４）■　二項定理の応用②　■

◇《等式の証明》学力化➡　／　，

★演習★【４】

二項定理を利用して，次の等式を証明しなさい。

ｎが奇数のとき

$_nC_0+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}={}_nC_1+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$

【考え方】これまで，右辺が（数）^{n}，または数の場合について，二項定理を利用して証明してきたが，この問題はその形をとっていない。

その形をとっていないなら，その従来の形をとるように式を変形すればよい。（自分のペースにもってきて証明する。）

すなわち，右辺の項をすべて，左辺へ移項し，左辺＝０の形にしてから，二項定理を利用して証明すればよい。

条件「ｎが奇数のとき」の使い方：$(-1)^{n-1}=1$，$(-1)^n=-1$

［答　　案］

与式の右辺の項をすべて左辺へ移項して，

二項定理を用いて$(1+\chi)^n$を展開すると，

$(1+\chi)^n=$

この式に$\chi=$［　　　　］を代入すると，　◀$(1+\chi)^n=$［　　］にするために，$\chi=$［　　　］を代入する

ｎが奇数だから，$(-1)^{n-1}=$［　　　　］，$(-1)^n=$［　　　　］

よって，

したがって，$_n$

であるから，与えられた等式は成立する。