１３

第１章　いろいろな式　１・整式の乗法・除法と分数式

４　二項定理（その２）

（１／４）■　二項定理①　■

展開式

★知識の整理★

【１】「二項定理」とは？

$(a+b)^n$ を展開した式を求めるのに，組合せの考えが利用できる。

例　$(a+b)^3$ の展開

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　◀これは公式の適用

この展開を，組合せの考えを使って，次のように求めることができる。

$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$ の３つの $(a+b)$ から，

① a を３個，b を０個取り出してかける。
　${}_3C_0$ 通りあり，a^3 が１個できる。

② a を２個，b を１個取り出してかける。
　${}_3C_1$ 通りあり，a^2b が３個できる。
　(例)　$(a+b)(a+b)(a+b)$ を展開すると，
　　aab，aba，baa のように a^2b が３個できる。

③ a を１個，b を２個取り出してかける。
　${}_3C_2$ 通りあり，ab^2 が３個できる。（abb，bab，bba）

④ a を０個，b を３個取り出してかける。
　${}_3C_3$ 通りあり，b^3 が１個できる。

よって，$(a+b)^3$ は，①～④の和であるから，

$$(a+b)^3=\underbrace{{}_3C_0a^3b^0}_{①}+\underbrace{{}_3C_1a^2b^1}_{②}+\underbrace{{}_3C_2a^1b^2}_{③}+\underbrace{{}_3C_3a^0b^3}_{④}$$

◀この考え方に注目！

$$={}_3C_0a^3+{}_3C_1a^2b+{}_3C_2ab^2+{}_3C_3b^3$$
$$=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

同様にして，いくつかの具体例をあげると…

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$　◀展開すると，$aa+ab+ab+bb$

$$={}_2C_0a^2b^0+{}_2C_1a^1b^1+{}_2C_2a^0b^2$$
$$={}_2C_0a^2+{}_2C_1ab+{}_2C_2b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2$$

$(a+b)^5=(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$

$$={}_5C_0a^5b^0+{}_5C_1a^4b^1+{}_5C_2a^3b^2+{}_5C_3a^2b^3+{}_5C_4a^1b^4+{}_5C_5a^0b^5$$
$$={}_5C_0a^5+{}_5C_1a^4b+{}_5C_2a^3b^2+{}_5C_3a^2b^3+{}_5C_4ab^4+{}_5C_5b^5$$
$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

（次のページへつづく）↗

□ □ 【整式の乗法・除法　No. １３（１／４）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

以上をまとめて，一般的に

$$(a+b)^n={}_nC_0a^nb^0+{}_nC_1a^{n-1}b^1+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_{n-1}a^1b^{n-1}+{}_nC_na^0b^n$$
$$={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n$$

これより，次のことがいえる。これを **二項定理** という。

▼ 二項定理 ▼

$$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n$$

二項定理の各項の係数

$${}_nC_0,\ {}_nC_1,\ {}_nC_2,\ ,\ \cdots,\ {}_nC_r,\ \cdots,\ {}_nC_{n-1},\ {}_nC_n$$

を **二項係数** という。

また，${}_nC_r$を係数にもつ項，すなわち，${}_nC_ra^{n-r}b^r$ を$(a+b)^n$の展開式の **一般項** という。

１３

第１章　いろいろな式　１・整式の乗法・除法と分数式

4 二項定理（その２）

（２／４）■　二項定理①　■

★解法の技術★

$(2\chi-y)^4$ の展開式を求めなさい。

【考え方】$a=(2\chi)$，$b=(-y)$として，二項定理を利用する。

二項定理

$$(a+b)^5={}_5C_0a^5b^0+{}_5C_1a^4b^1+{}_5C_2a^3b^2+\cdots+{}_5C_ra^{5-r}b^r+{}_5C_5a^0b^5$$

［答　　案］

$$(2\chi-y)^4$$
$$=\{(2\chi)+(-y)\}^4$$
$$={}_4C_0(2\chi)^4+{}_4C_1(2\chi)^3(-y)^1+{}_4C_2(2\chi)^2(-y)^2+{}_4C_3(2\chi)^1(-y)^3+{}_4C_4(-y)^4$$
$$=16\chi^4-32\chi^3y+24\chi^2y^2-8\chi y^3+y^4$$

◇《展開式》学力化➡　　／　，

★理解のチェック★

次の式の展開式を求めなさい。

(1) $(3a-2b)^5$　　(2) $(\chi+2)^6$

【考え方】二項定理を利用する。

二項定理

$$(a+b)^5={}_5C_0a^5b^0+{}_5C_1a^4b^1+{}_5C_2a^3b^2+\cdots+{}_5C_ra^{5-r}b^r+{}_5C_5a^0b^5$$

［答　　案］

１　３

第１章　いろいろな式　１・整式の乗法・除法と分数式

４ 二項定理（その２）

（３／４）■　二項定理①　■

◇《展開式》学力化➡　　／　，

★演習★【１】

次の式の展開式を求めなさい。

(1)　$(3\chi+2y)^5$　　(2)　$(a-2b)^4$

(3)　$(\chi-3)^6$　　(4)　$(\chi+1)^4$

［答　　案］

１３

第１章　いろいろな式　１・整式の乗法・除法と分数式

４ 二項定理（その２）

（４／４）■　二項定理①　■

◇《展開式》 学力化➡　　／　，

★演習★【２】

次の式の展開式を求めなさい。

(1)　$(x-3y)^6$　　　(2)　$\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^6$

(3)　$(x-2)^5$　　　(4)　$(a+b)^4$

［答　　案］