

展開式

★知識の整理★

【1】「二項定理」とは？

$(a+b)^n$ を展開した式を求めるのに、組合せの考えが利用できる。

例 $(a+b)^3$ の展開

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

◀これは公式の適用

この展開を、組合せの考えを使って、次のように求めることができる。

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$ の3つの $(a+b)$ から、

- ① aを3個, bを0個取り出してかける。
 ${}_3C_0$ 通りあり, a^3 が1個できる。
- ② aを2個, bを1個取り出してかける。
 ${}_3C_1$ 通りあり, a^2b が3個できる。
 (例) $(a+b)(a+b)(a+b)$ を展開すると,
 aaa, aab, aba, baa のように a^2b が3個できる。
- ③ aを1個, bを2個取り出してかける。
 ${}_3C_2$ 通りあり, ab^2 が3個できる。(abb, bab, bba)
- ④ aを0個, bを3個取り出してかける。
 ${}_3C_3$ 通りあり, b^3 が1個できる。

よって, $(a+b)^3$ は, ①~④の和であるから,

$$(a+b)^3 = \underline{{}_3C_0 a^3 b^0} + \underline{{}_3C_1 a^2 b^1} + \underline{{}_3C_2 a^1 b^2} + \underline{{}_3C_3 a^0 b^3}$$

◀この考え方に注目!

$$\begin{aligned} & \text{①} \qquad \qquad \text{②} \qquad \qquad \text{③} \qquad \qquad \text{④} \\ & = \underline{{}_3C_0 a^3} + \underline{{}_3C_1 a^2 b} + \underline{{}_3C_2 a b^2} + \underline{{}_3C_3 b^3} \\ & = 1 a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + 1 b^3 \\ & = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3 \end{aligned}$$

同様にして, いくつかの具体例をあげると…

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

◀展開すると, $aa + ab + ab + bb$

$$= {}_2C_0 a^2 b^0 + {}_2C_1 a^1 b^1 + {}_2C_2 a^0 b^2$$

$$= {}_2C_0 a^2 + {}_2C_1 ab + {}_2C_2 b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

$$= {}_5C_0 a^5 b^0 + {}_5C_1 a^4 b^1 + {}_5C_2 a^3 b^2 + {}_5C_3 a^2 b^3$$

$$+ {}_5C_4 a^1 b^4 + {}_5C_5 a^0 b^5$$

$$= {}_5C_0 a^5 + {}_5C_1 a^4 b + {}_5C_2 a^3 b^2 + {}_5C_3 a^2 b^3$$

$$+ {}_5C_4 a b^4 + {}_5C_5 b^5$$

$$= a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + b^5$$

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【整式の乗法・除法 No. 1 3 (1 / 4)】 - 〈2枚目 / 2枚〉

➔ (前のページからのつづき)

以上をまとめて、一般的に

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_n C_0 a^n b^0 + {}_n C_1 a^{n-1} b^1 + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad \dots + {}_n C_r a^{n-r} b^r + \dots + {}_n C_{n-1} a^1 b^{n-1} + {}_n C_n a^0 b^n \\ &= {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad \dots + {}_n C_r a^{n-r} b^r + \dots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + {}_n C_n b^n\end{aligned}$$

これより、次のことがいえる。これを **二項定理** という。

▼ 二項定理 ▼

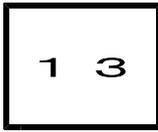
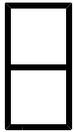
$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad \dots + {}_n C_r a^{n-r} b^r + \dots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + {}_n C_n b^n\end{aligned}$$

二項定理の各項の係数

$${}_n C_0, {}_n C_1, {}_n C_2, \dots, {}_n C_r, \dots, {}_n C_{n-1}, {}_n C_n$$

を **二項係数** という。

また、 ${}_n C_r$ を係数にもつ項、すなわち、 ${}_n C_r a^{n-r} b^r$ を $(a+b)^n$ の展開式の **一般項** という。



第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

4 二項定理(その2)

(2/4) ■ 二項定理① ■

★解法の技術★

$(2x - y)^4$ の展開式を求めなさい。

【考え方】 $a = (2x)$, $b = (-y)$ として, 二項定理を利用する。

二項定理

$$(a + b)^5 = {}_5C_0 a^5 b^0 + {}_5C_1 a^4 b^1 + {}_5C_2 a^3 b^2 + \cdots + {}_5C_r a^{5-r} b^r + {}_5C_5 a^0 b^5$$

[答 案]

$$\begin{aligned} & (2x - y)^4 \\ &= \{(2x) + (-y)\}^4 \\ &= {}_4C_0 (2x)^4 + {}_4C_1 (2x)^3 (-y)^1 + {}_4C_2 (2x)^2 (-y)^2 + {}_4C_3 (2x)^1 (-y)^3 + {}_4C_4 (-y)^4 \\ &= 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4 \end{aligned}$$

◇ 《展開式》 学力化 → /

★理解のチェック★

次の式の展開式を求めなさい。

(1) $(3a - 2b)^5$

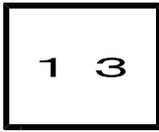
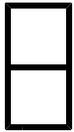
(2) $(x + 2)^6$

【考え方】 二項定理を利用する。

二項定理

$$(a + b)^5 = {}_5C_0 a^5 b^0 + {}_5C_1 a^4 b^1 + {}_5C_2 a^3 b^2 + \cdots + {}_5C_r a^{5-r} b^r + {}_5C_5 a^0 b^5$$

[答 案]



第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

4 二項定理(その2)

(3/4) ■ 二項定理① ■

◇《展開式》 **学力化** → / ,

★演習★【1】

次の式の展開式を求めなさい。

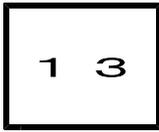
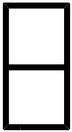
(1) $(3x + 2y)^5$

(2) $(a - 2b)^4$

(3) $(x - 3)^6$

(4) $(x + 1)^4$

[答 案]



第1章 いろいろな式 1・整式の乗法・除法と分数式

4 二項定理（その2）

（4 / 4） ■ 二項定理① ■

◇ 《展開式》 **学力化** → / ,

★演習★【2】

次の式の展開式を求めなさい。

(1) $(x - 3y)^6$

(2) $(x + \frac{1}{3})^6$

(3) $(x - 2)^5$

(4) $(a + b)^4$

[答 案]