|メニューへ戻る|

判別式による最大・最小(2)

◇《判別式による最大・最小(2)》 **学力化**➡　／　，

★解法の技術★

> (1) 関数 $y=2\chi^2-5\chi+1$ の値域を，この等式を満たす実数 χ が存在するような y の値の範囲として求めよ。
>
> (2) 関数 $y=\dfrac{3\chi}{\chi^2+\chi+1}$ の値域を求めよ。

【考え方】(1) ２次関数の値域は，普通は標準形に直して求めるが，No.１５同様に，実数条件（D≧０）を利用して求める方法もある。

χ，y について整理すると，

$$2\chi^2+5\chi+(1-y)=0$$ ◀ χ の２次方程式

ここで，χ は実数であるから，この２次方程式は実数解をもつ。したがって，実数解をもつ⟺ D≧０ を利用すると，y の値の範囲が求められる。

◀判別式はyについての不等式になるから。

(2) このような分数の形をした関数は数学Ⅰの範囲外だが，(1)の方法が使える。

χ，y の等式を分母を払って，χ について整理すると，

$$y\chi^2+(y-3)\chi+y=0$$ ◀ $y\neq0$ のとき χ の２次方程式

χ の値は実数であるから，$y\neq0$ のとき，D≧０

$y=0$ のとき，判別式は使えないから，別扱いにして調べる。

［答　案］

(1) **関数 $y=2\chi^2-5\chi+1$ の値域を求める**

1 （与式を χ について整理する）　◀理由は【考え方】(1)を参照。

$y=2\chi^2-5\chi+1$ を χ についての２次方程式とみて整理すると，

$$2\chi^2-5\chi+(1-y)=0$$

2 （実数解条件を使って，yの範囲を求める）

χ は実数であるから，この χ の２次方程式は実数解をもつ。　◀D≧０となるという意味。

したがって，この２次方程式の判別式をDとすると，

$$D=(-5)^2-4\cdot2\cdot(1-y)$$
$$=17+8y$$

D≧０より，$17+8y\geqq0$ であるから，$y\geqq-\dfrac{17}{8}$

3 （答をまとめる）

よって，求める値域は　$y\geqq-\dfrac{17}{8}$

（次のページへつづく）↗

□ □ 【２次関数と方程式・不等式　No. １６（１／５）】 －〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(2) **関数 $y=\dfrac{3x}{x^2+x+1}$ の値域を求める**

◀ y を k とみなすとNo.15と同じ問題になる。

値域を求めるとは，最小値と最大値を求めることと同じ。

◀理由は【考え方】(1) (2) を参照。

1　（与式を x について整理する）

x が実数のとき，与式の分母について，

$$x^2+x+1=x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1$$

◀平方完成（分母が0でないことを確認するため）

$$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\neq 0$$

◀（分母）≠0であるから分母を払うことができる。

$y=\dfrac{3x}{x^2+x+1}$ の両辺に x^2+x+1 をかけて，

$$y(x^2+x+1)=3x$$

x について整理すると，

$$yx^2+(y-3)x+y=0 \quad \cdots①$$

◀この方程式が実数解 x をもつ条件を求める。

2　（実数解条件を使って，y の範囲を求める）

（ｉ）　$y\neq 0$ のとき，

x は実数であるから，x の２次方程式①は実数解をもつ。

◀D≧0となるという意味。

したがって，２次方程式①の判別式をＤとすると，

$$D=(y-3)^2-4\cdot y\cdot y$$
$$=y^2-6y+9-4y^2$$
$$=-3y^2-6y+9$$
$$=-3(y^2+2y-3)=-3(y+3)(y-1)$$

$D\geqq 0$ より，$-3(y+3)(y-1)\geqq 0$ であるから，$(y+3)(y-1)\leqq 0$

よって，$y\neq 0$ に注意して解くと，$-3\leqq y<0$，$0<y\leqq 1$

◀ $y\neq 0$

（ii）　$y=0$ のとき，

①は $3x=0$ となり，実数解 $x=0$ をもつ。

◀y＝0のときも実数解をもつ。

3　（答をまとめる）

（ｉ），（ii）から，求める値域は　$\underline{-3\leqq y\leqq 1}$

16

第２章　２次関数　３・２次関数と方程式・不等式
3　２次不等式の応用（その４）
（２／５）■　判別式による最大・最小(2)　■

◇《判別式による最大・最小(2)》 学力化➡　　／　，

★理解のチェック★ 【１】

実数χ，ｙが方程式 $2\chi^2+4\chi y+3y^2+4\chi+5y-4=0$ を満たすとき，χのとりうる最大の値を求めよ。　［類　東京大］

【考え方】与式をｙの２次方程式とみなして整理し，その判別式をとると，χの不等式となり，χの範囲を求めることができる。

［答　　案］

1　（与式をｙについて整理する）　◀理由は【考え方】(1)を参照。

$2\chi^2+4\chi y+3y^2+4\chi+5y-4=0$ をｙについての２次方程式とみて整理すると，

2　（実数解条件を使って，χの範囲を求める）

ｙは実数であるから，このｙの２次方程式は実数解をもつ。　◀D≧0となるという意味。

したがって，この２次方程式の判別式をＤとすると，

Ｄ＝

Ｄ≧０より，

これを解くと，

3　（答をまとめる）

よって，χのとりうる最大の値は ＿＿＿＿＿＿＿＿

｜メニューへ戻る｜

１６

第２章　２次関数　３・２次関数と方程式・不等式

3　２次不等式の応用（その４）

（３／５）■　判別式による最大・最小(2)　■

◇《判別式による最大・最小(2)》**学力化**➡　　／　，

★理解のチェック★【２】

関数 $y=\dfrac{8\chi+4}{\chi^2-2\chi+5}$ の値域を求めよ。　［東京理科大］

【考え方】No.１６（１／５）(2)とまったく同じ考え方で解ける。

◀ｙをｋとみなすとNo.１５と同じ問題になる。
値域を求めるとは，最小値と最大値を求めることと同じ。

［答　　案］

1　（与式を χ について整理する）

◀ χ の２次方程式の判別式からyの値の範囲を求めるから。（値域）

◀平方完成（分母が０でないことを確認するため）

◀（分母）≠０であるから分母を払うことができる。

◀この方程式が実数解 χ をもつ条件を求める。

2　（実数解条件を使って，ｙの範囲を求める）

（ｉ）

◀Ｄ≧０となるという意味。

◀ $y\neq 0$

（ii）

◀y＝０のときも実数解をもつ。

3　（答をまとめる）

（ｉ），（ii）から，求める値域は ＿＿＿＿＿＿＿＿

｜メニューへ戻る｜

１６

第２章　２次関数　３・２次関数と方程式・不等式

3 ２次不等式の応用（その４）

（４／５）■　判別式による最大・最小(2)　■

◇《判別式による最大・最小(2)》学力化➡　　／　，

★演習★【１】

$\dfrac{\chi-1}{\chi^2+3}$ の最大値，最小値とそのときの χ の値を求めよ。

【考え方】与えられた式を「＝ｋ」とおき，式を整理する。

χ が実数である条件から，判別式Ｄ≧０を利用して，

ｋ（$=\dfrac{\chi-1}{\chi^2+3}$）のとる値の範囲を考える。

◀要するに，№.１６（１／５）(2) で，ｙをｋに置き換えると同じ解き方で解ける。
また，χ の値の求め方は，№.１５（１／５）$\boxed{3}$を参照。

［答　　案］

$\boxed{1}$ （与式をｋとおき，χ について整理する）

$\boxed{2}$ （実数解条件を使って，ｋの範囲を求める）

（ｉ）

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

□ □　【２次関数と方程式・不等式　No.１６（４／５）】　ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

（ⅱ）

$\boxed{3}$　（χ の値を求める）

$\boxed{4}$　（答をまとめる）

以上から，$\chi =$ 　　　　　のとき最大値

$\chi =$ 　　　　　のとき最小値

をとる。

｜メニューへ戻る｜

１６

第２章　２次関数　３・２次関数と方程式・不等式

3　２次不等式の応用（その４）

（５／５）■　判別式による最大・最小(2)　■

◇《判別式による最大・最小(2)》学力化➡　　／　，

★演習★【２】

$\dfrac{2(\chi-1)}{\chi^2-2\chi+2}$ の最大値，最小値とそのときの χ の値を求めよ。

［答　　案］

1　（与式を k とおき，χ について整理する）

2　（実数解条件を使って，k の範囲を求める）

（ｉ）

（ii）

（次のページへつづく）↗

□ □　【２次関数と方程式・不等式　No.１６（５／５）】　―〈２枚目／２枚〉

（前のページからのつづき）

3　（χ の値を求める）

4　（答をまとめる）

以上から，$\chi=$　　　　のとき最大値

$\chi=$　　　　のとき最小値

をとる。