

16

## 第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

## 3 2次不等式の応用(その4)

(1/5) ■ 判別式による最大・最小(2) ■

## 判別式による最大・最小(2)

◇ 《判別式による最大・最小(2)》 学力化 → /

## ★解法の技術★

(1) 関数  $y = 2x^2 - 5x + 1$  の値域を、この等式を満たす実数  $x$  が存在するような  $y$  の値の範囲として求めよ。

(2) 関数  $y = \frac{3x}{x^2 + x + 1}$  の値域を求めよ。

【考え方】(1) 2次関数の値域は、普通は標準形に直して求めるが、No.15同様に、実数条件( $D \geq 0$ )を利用して求める方法もある。

$x, y$  について整理すると、

$$2x^2 + 5x + (1 - y) = 0$$

◀  $x$  の2次方程式

ここで、 $x$  は実数であるから、この2次方程式は実数解をもつ。したがって、実数解をもつ  $\Leftrightarrow D \geq 0$  を利用すると、 $y$  の値の範囲が求められる。

◀ 判別式は  $y$  についての不等式になるから。

(2) このような分数の形をした関数は数学 I の範囲外だが、(1)の方法が使える。

$x, y$  の等式を分母を払って、 $x$  について整理すると、

$$yx^2 + (y - 3)x + y = 0$$

◀  $y \neq 0$  のとき  $x$  の2次方程式

$x$  の値は実数であるから、 $y \neq 0$  のとき、 $D \geq 0$

$y = 0$  のとき、判別式は使えないから、別扱いにして調べる。

[答 案]

(1) 関数  $y = 2x^2 - 5x + 1$  の値域を求める

① (与式を  $x$  について整理する)

◀ 理由は【考え方】(1)を参照。

$y = 2x^2 - 5x + 1$  を  $x$  についての2次方程式とみて整理すると、

$$2x^2 - 5x + (1 - y) = 0$$

② (実数解条件を使って、 $y$  の範囲を求める)

$x$  は実数であるから、この  $x$  の2次方程式は実数解をもつ。

◀  $D \geq 0$  となるという意味。

したがって、この2次方程式の判別式を  $D$  とすると、

$$\begin{aligned} D &= (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - y) \\ &= 17 + 8y \end{aligned}$$

$D \geq 0$  より、 $17 + 8y \geq 0$  であるから、 $y \geq -\frac{17}{8}$

③ (答をまとめる)

よって、求める値域は  $y \geq -\frac{17}{8}$

(次のページへつづく) ↗

## □ □ 【 2次関数と方程式・不等式 No. 16 (1/5) 】 - 〈2枚目/2枚〉

→ (前のページからのつづき)

(2) 関数  $y = \frac{3x}{x^2+x+1}$  の値域を求める◀  $y$  を  $k$  とみなすとNo.15と同じ問題になる。

値域を求めるとは、最小値と最大値を求めることと同じ。

① (与式を  $x$  について整理する)

◀ 理由は【考え方】(1)(2)を参照。

 $x$  が実数のとき、与式の分母について、

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1$$

◀ 平方完成(分母が0でないことを確認するため)

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0$$

◀ (分母)  $\neq 0$  であるから分母を払うことができる。 $y = \frac{3x}{x^2+x+1}$  の両辺に  $x^2+x+1$  をかけて、

$$y(x^2+x+1) = 3x$$

 $x$  について整理すると、

$$\underline{yx^2 + (y-3)x + y = 0} \quad \dots \textcircled{1}$$

◀ この方程式が実数解  $x$  をもつ条件を求める。② (実数解条件を使って、 $y$  の範囲を求める)(i)  $y \neq 0$  のとき、 $x$  は実数であるから、 $x$  の2次方程式①は実数解をもつ。◀  $D \geq 0$  となるという意味。したがって、2次方程式①の判別式を  $D$  とすると、

$$D = (y-3)^2 - 4 \cdot y \cdot y$$

$$= y^2 - 6y + 9 - 4y^2$$

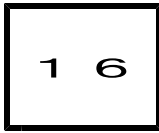
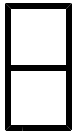
$$= -3y^2 - 6y + 9$$

$$= -3(y^2 + 2y - 3) = -3(y+3)(y-1)$$

 $D \geq 0$  より、 $-3(y+3)(y-1) \geq 0$  であるから、 $(y+3)(y-1) \leq 0$ よって、 $y \neq 0$  に注意して解くと、 $-3 \leq y < 0$ 、 $0 < y \leq 1$ ◀  $y \neq 0$ (ii)  $y = 0$  のとき、①は  $3x = 0$  となり、実数解  $x = 0$  をもつ。◀  $y = 0$  のときも実数解をもつ。

③ (答をまとめる)

(i), (ii) から、求める値域は  $-3 \leq y \leq 1$



## 第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

## 3 2次不等式の応用(その4)

(2/5) ■ 判別式による最大・最小(2) ■

◇ 《判別式による最大・最小(2)》 **学力化** → /

-----★理解のチェック★【1】-----

実数  $x, y$  が方程式  $2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$  を満たすとき,  $x$  のとりうる最大の値を求めよ。

[類 東京大]

-----  
**【考え方】** 与式を  $y$  の2次方程式とみなして整理し, その判別式をとると,  $x$  の不等式となり,  $x$  の範囲を求めることができる。

[答 案]

1 (与式を  $y$  について整理する)

◀理由は【考え方】(1)を参照。

$2x^2 + 4xy + 3y^2 + 4x + 5y - 4 = 0$  を  $y$  についての2次方程式とみて整理すると,

2 (実数解条件を使って,  $x$  の範囲を求める)

$y$  は実数であるから, この  $y$  の2次方程式は実数解をもつ。

◀ $D \geq 0$ となるという意味。

したがって, この2次方程式の判別式を  $D$  とすると,

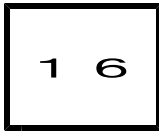
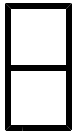
$$D =$$

$D \geq 0$  より,

これを解くと,

3 (答をまとめる)

よって,  $x$  のとりうる最大の値は \_\_\_\_\_



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(3/5) ■ 判別式による最大・最小(2) ■

◇ 《判別式による最大・最小(2)》 **学力化** → / .

-----★理解のチェック★【2】-----

関数  $y = \frac{8x+4}{x^2-2x+5}$  の値域を求めよ。

[東京理科大]

-----

【考え方】 No. 16 (1/5) (2) とまったく同じ考え方で解ける。

◀  $y$  を  $k$  とみなすと No. 15 と同じ問題になる。

値域を求めるとは、最小値と最大値を求めることと同じ。

[答 案]

1 (与式を  $x$  について整理する)

◀  $x$  の2次方程式の判別式から  $x$  の値の範囲を求めるから。

(値域)

◀ 平方完成(分母が0でないことを確認するため)

◀ (分母)  $\neq 0$  であるから分母を払うことができる。

◀ この方程式が実数解  $x$  をもつ条件を求める。

2 (実数解条件を使って、 $y$  の範囲を求める)

(i)

◀  $D \geq 0$  となるという意味。

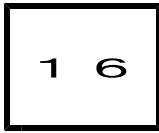
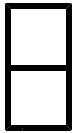
(ii)

◀  $y \neq 0$

◀  $y=0$  のときも実数解をもつ。

3 (答をまとめる)

(i), (ii) から、求める値域は \_\_\_\_\_



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(4/5) ■ 判別式による最大・最小(2) ■

◇ 《判別式による最大・最小(2)》 **学力化** → / .

★演習★【1】

$\frac{x-1}{x^2+3}$  の最大値, 最小値とそのときの  $x$  の値を求めよ。

【考え方】与えられた式を「 $=k$ 」とおき, 式を整理する。

$x$  が実数である条件から, 判別式  $D \geq 0$  を利用して,

$k (= \frac{x-1}{x^2+3})$  のとる値の範囲を考える。

◀要するに, No. 16 (1/5) (2) で,  $y$  を  $k$  に置き換えると同じ解き方で解ける。

また,  $x$  の値の求め方は, No. 15 (1/5) ③を参照。

[答 案]

① (与式を  $k$  とおき,  $x$  について整理する)

② (実数解条件を使って,  $k$  の範囲を求める)

(i)

(次のページへつづく) →

□ □ 【 2 次関数と方程式・不等式 No. 16 (4 / 5) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚〉

↗ (前のページからのつづき)

(ii)

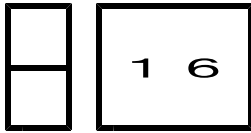
**3** ( $x$  の値を求める)

**4** (答をまとめる)

以上から,  $x =$  \_\_\_\_\_ のとき最大値 \_\_\_\_\_

$x =$  \_\_\_\_\_ のとき最小値 \_\_\_\_\_

をとる。



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(5 / 5) ■ 判別式による最大・最小(2) ■

◇ 《判別式による最大・最小(2)》 **学力化** → / .

★演習★【2】

$\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}$  の最大値, 最小値とそのときの  $x$  の値を求めよ。

[答 案]

1 (与式を  $k$  とおき,  $x$  について整理する)

2 (実数解条件を使って,  $k$  の範囲を求める)

( i )

( ii )

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【 2 次関数と方程式・不等式 No. 16 (5 / 5) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚〉

↗ (前のページからのつづき)

3 (  $x$  の値を求める )

4 ( 答をまとめる )

以上から,  $x =$  \_\_\_\_\_ のとき最大値 \_\_\_\_\_

$x =$  \_\_\_\_\_ のとき最小値 \_\_\_\_\_

をとる。