

1 5

第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(1/5) ■ 判別式による最大・最小(1) ■

判別式による最大・最小(1)

◇ 《判別式による最大・最小(1)》 学力化 → /

★解法の技術★

実数 x, y が $x^2 + (y-1)^2 = 5$ を満たすとき、 $2x - y$ の最大値と最小値、およびそのときの x, y の値を求めよ。 [類 法政大]

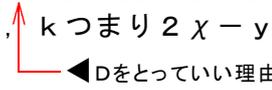
【考え方】条件つき2変数関数の最大・最小の問題では、条件の式を使って文字を減らす、というのが解法の基本である。

しかし、この問題のように、条件式 $x^2 + (y-1)^2 = 5$ を x または y について解き、 $2x - y$ に代入しようとする…

たとえば、 $x^2 + (y-1)^2 = 5$ を x について解いて、 $x = \pm \sqrt{5 - (y-1)^2}$
これを $2x - y$ に代入して、 $2(\pm \sqrt{5 - (y-1)^2}) - y$ となると、まず、解けない。

そこで、逆に、 $2x - y = k$ とおき、これを条件式とみて文字を減らす。

y を消去すると、 $x^2 + (2x - k - 1)^2 = 5$ これは x の2次方程式である。

ここで、 x は実数であるから、この2次方程式は実数解をもつ。 したがって、実数解をもつ $\Leftrightarrow D \geq 0$ を利用すると、 k つまり $2x - y$ の値の範囲が求められる。


すなわち、判別式は係数についての関係式だから、 k を x の係数にすれば

x の判別式を作ること、 k の範囲を調べることができる。 ◀スーパーテクニク

[答 案]

① (文字を減らす)

$2x - y = k$ とおき、 y について解くと、 ◀ x, y が実数だから k も実数

$$y = 2x - k \quad \dots \textcircled{1}$$

これを $x^2 + (y-1)^2 = 5$ に代入すると、

$$x^2 + (2x - k - 1)^2 = 5$$

整理して、

$$x^2 + (2x)^2 + (-k)^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-k) + 2 \cdot (-k) \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \cdot 2x - 5 = 0$$

$$x^2 + 4x^2 + k^2 + 1 - 4kx + 2k - 4x - 5 = 0$$

$$\underline{5x^2 - 4(k+1)x + k^2 + 2k - 4 = 0} \quad \dots \textcircled{2}$$

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【 2次関数と方程式・不等式 No. 15 (1/5) 】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

2 (実数解条件を使って、kの範囲を求める)

 x は実数であるから、 x の2次方程式②は実数解をもつ。

したがって、2次方程式②の判別式をDとすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \{-2(k+1)\}^2 - 5(k^2 + 2k - 4) \\ &= 4k^2 + 8k + 4 - 5k^2 - 10k + 20 \\ &= -k^2 - 2k + 24 \\ &= -(k^2 + 2k - 24) \\ &= -(k+6)(k-4) \end{aligned}$$

 $D \geq 0$ より、 $-(k+6)(k-4) \geq 0$ であるから、 $(k+6)(k-4) \leq 0$ よって、 $-6 \leq k \leq 4$ したがって、 $2x - y$ は、最小値 -6 、最大値 4 をとる。

◀ $k = 2x - y$

◀ $D \geq 0$ となるという意味。3 (x と y の値を求める) $k = -6, 4$ のとき、 $D = 0$ で、②は重解 $x = -\frac{-4(k+1)}{2 \cdot 5} = \frac{2(k+1)}{5}$ をもつ。

よって、

- $k = 4$ のとき、 $x = \frac{2(4+1)}{5} = 2$

①から、 $y = 2 \times (2) - (4) = 0$

- $k = -6$ のとき、 $x = \frac{2(-6+1)}{5} = -2$

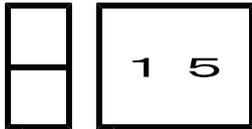
①から、 $y = 2 \times (-2) - (-6) = 2$

◀ $a x^2 + b x + c = 0$ の重解は、 $x = \frac{-b}{2a}$
--

4 (答をまとめる)

以上から、 $x = 2, y = 0$ のとき最大値 4 $x = -2, y = 2$ のとき最小値 -6

をとる。



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(2/5) ■ 判別式による最大・最小(1) ■

◇ 《判別式による最大・最小(1)》 **学力化** → /

-----★理解のチェック★-----

実数 x, y が $x^2 + xy + y^2 = 1$ を満たすとき, $2x + y$ の最大値と最小値, およびそのときの x, y の値を求めよ。

[答 案]

1 (文字を減らす)

$2x + y = k$ とおき, y について解くと,

◀ x, y が実数だから k も実数

2 (実数解条件を使って, k の範囲を求める)

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【 2 次関数と方程式・不等式 No. 1 5 (2 / 5) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚 〉

↗ (前のページからのつづき)

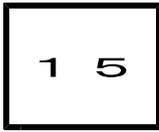
3 (x と y の値を求める)

4 (答をまとめる)

以上から, $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$ のとき最大値

$x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$ のとき最小値

をとる。



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(3/5) ■ 判別式による最大・最小(1) ■

◇ 《判別式による最大・最小(1)》 **学力化** → / .

★演習★【1】

x, y を実数として、 $x^2 + y^2 = 8$ のとき、 $x + y$ の最大値、最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。

[答 案]

1 (文字を減らす)

$x + y = k$ とおき、 y について解くと、

◀ x, y が実数だから k も実数

2 (実数解条件を使って、 k の範囲を求める)

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【 2次関数と方程式・不等式 No. 15 (3/5) 】 - 〈2枚目/2枚〉

↗ (前のページからのつづき)

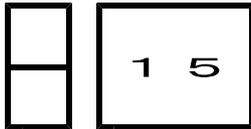
3 (xとyの値を求める)

4 (答をまとめる)

以上から, $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$ のとき最大値

$x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$ のとき最小値

をとる。



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用（その4）

（4 / 5） ■ 判別式による最大・最小(1) ■

◇ 《判別式による最大・最小(1)》 **学力化** → / .

★演習★【2】

実数 x, y が $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$ を満たすとき、 $x + y$ の最大値と最小値、およびそのときの x, y の値を求めよ。

[答 案]

1 (文字を減らす)

2 (実数解条件を使って、 k の範囲を求める)

(次のページへつづく) ↗

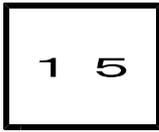
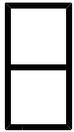
□ □ 【 2 次関数と方程式・不等式 No. 1 5 (4 / 5) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚 〉

↗ (前のページからのつづき)

3 (x と y の値を求める)

4 (答をまとめる)

以上から,



第2章 2次関数 3・2次関数と方程式・不等式

3 2次不等式の応用(その4)

(5/5) ■ 判別式による最大・最小(1) ■

◇ 《判別式による最大・最小(1)》 **学力化** → / .

★演習★【3】

実数 x, y が $x^2 - 2xy + 2y^2 = 2$ を満たすとき、

- (1) x のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。
- (2) $2x + y$ のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

[答 案]

(1) x のとりうる値の最大値と最小値

① (与式を y について整理する)

◀ y の2次方程式の判別式を使って x の範囲を求めるため。

▲問題はこれを求めよと言っている。

② (実数解条件を使って、 x の範囲を求める)

◀①を y の2次方程式をみる。

③ (答をまとめる)

したがって、 x のとりうる値の最大値は _____ , 最小値は _____

(2) $2x + y$ のとりうる値の最大値と最小値

① (文字を減らす)

(次のページへつづく) →

□ □ 【 2 次関数と方程式・不等式 No. 1 5 (5 / 5) 】 - 〈 2 枚目 / 2 枚〉

↗ (前のページからのつづき)

2 (実数解条件を使って, k の範囲を求める)

3 (x と y の値を求める)

4 (答をまとめる)

以上から,