

15

## 第1章 数と式 第4節 集合と命題

## 4 「すべて」と「ある」

(1/6) ■ 「すべて」と「ある」の否定 ■

## 「すべて」と「ある」の否定

## — ●★解法の技術★の学習のしかた●—

- (1) 下の答案を理解し、「考え方」を覚えましょう。／覚えたら、……  
 (2) 模範解答を見ないで、「理解のチェック」の問題を解いてみましょう。  
 (答案を見ながら書くと勉強になりません。一度、「考え方」を頭の中に入れることが大切です。)

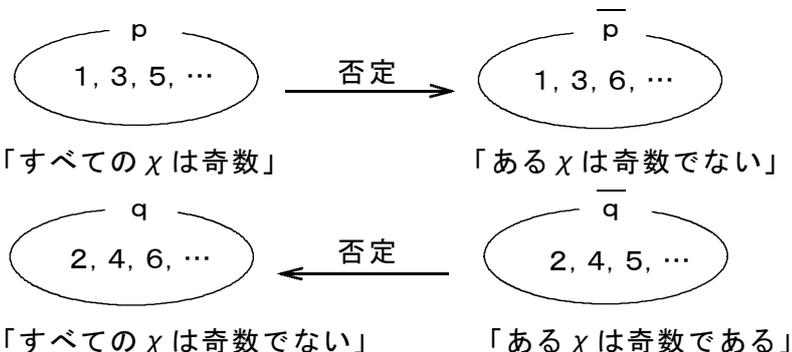
## ★解法の技術★

次の命題の否定を述べなさい。また、否定の真偽を調べなさい。

- (1) すべての素数  $n$  について、 $n$  は奇数である。  
 (2) ある実数  $x$  について  $x^2 \leq 0$

## 【考え方】「すべて」と「ある」に関する命題の否定

「すべての  $x$  について  $p$ 」の否定は「ある  $x$  について  $\bar{p}$ 」  
 「ある  $x$  について  $p$ 」の否定は「すべての  $x$  について  $\bar{p}$ 」  
 すなわち、「すべて」と「ある」を入れ替えて結論を否定すればよい。  
 次のようにイメージします！



## 【答案】

- (1) 否定：「ある素数  $n$  について  $n$  は奇数でない。」  
 = 「ある素数  $n$  について、 $n$  は偶数である。」 ◀「 $\sim$ である」の表現に書きかえる  
 真偽： $n=2$  のとき、 $n$  は偶数であるから 真。
- (2) 否定：「すべての実数  $x$  について  $x^2 \leq 0$  でない。」  
 = 「すべての実数  $x$  について  $x^2 > 0$  である。」 ◀「 $\sim$ である」の表現に書きかえる  
 真偽： $x=0$  のとき、 $x^2=0$  であり、 $x^2 > 0$  は成り立たないから 偽。

★知識の整理★【すべての  $x$ 、ある  $x$ 】

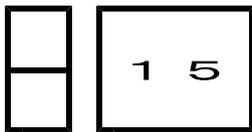
「すべての  $x$ 」という代わりに

「どんな  $x$ 」, 「任意の  $x$ 」, 「 $x$  が何であっても…」, 「常に…」

また、「ある  $x$ 」という代わりに

「適当な  $x$ 」, 「少なくとも1つの  $x$ 」, 「…である  $x$  が存在する」

という表現もよく使われる。これらの表現を見たらピンとくるようにしたい。



第1章 数と式 第4節 集合と命題

4 「すべて」と「ある」

(2/6) ■ 「すべて」と「ある」の否定 ■

◇ 《「すべて」と「ある」の否定》 **学力化** → /

★理解のチェック★

次の命題の否定を述べなさい。また、否定の真偽を調べなさい。

- (1) すべての素数  $n$  について、 $n$  は奇数である。
- (2) ある実数  $x$  について  $x^2 \leq 0$

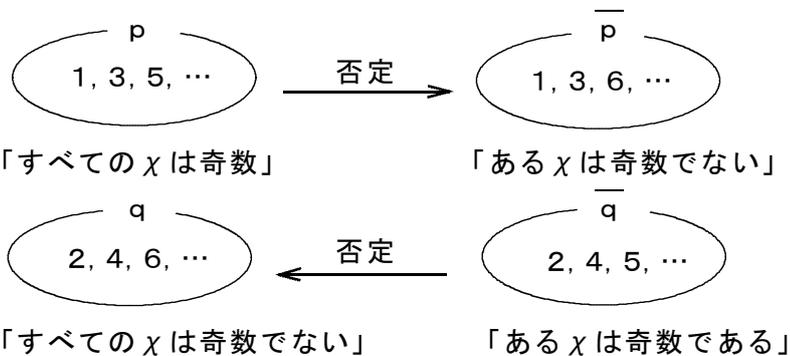
【考え方】 「すべて」と「ある」に関する命題の否定

「すべての  $x$  について  $p$ 」の否定は「ある  $x$  について  $\bar{p}$ 」

「ある  $x$  について  $p$ 」の否定は「すべての  $x$  について  $\bar{p}$ 」

すなわち、「すべて」と「ある」を入れ替えて結論を否定すればよい。

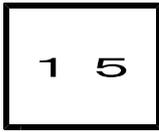
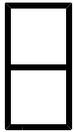
次のようにイメージします！



[答 案]

(1) 否定：「 [ ]  $n$  について  $n$  は [ ] 。」  
 = 「 [ ]  $n$  について  $n$  は [ ] 。」 ◀「 $\sim$ である」の表現  
 真偽：  $n = [ ]$  のとき、  $n$  は [ ] であるから [ 真・偽 ] 。（正しい方に○）

(2) 否定：「 [ ]  $x$  について [ ] 。」  
 = 「 [ ]  $x$  について [ ] 。」 ◀「 $\sim$ である」の表現  
 真偽：  $x = [ ]$  のとき、  $x^2 = [ ]$  であり、  
 [ ] から [ 真・偽 ] 。（正しい方に○）



第1章 数と式 第4節 集合と命題

4 「すべて」と「ある」

(3/6) ■ 「すべて」と「ある」の否定 ■

◇ 《「すべて」と「ある」の否定》 **学力化** → /

★演習★【1】

次の命題の否定を述べなさい。また、否定の真偽を調べなさい。

- (1) すべての実数  $x$  について  $(x+1)^2 > 0$
- (2) ある自然数  $n$  について  $n^2 = 5$

【考え方】 「すべて」と「ある」に関する命題の否定

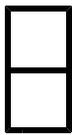
「すべての  $x$  について  $p$ 」の否定は「ある  $x$  について  $\bar{p}$ 」

「ある  $x$  について  $p$ 」の否定は「すべての  $x$  について  $\bar{p}$ 」

すなわち、「すべて」と「ある」を入れ替えて結論を否定すればよい。

[答 案]

- (1) 否定：「 [                    ]  $x$  について [                    ] 。」  
 = 「 [                    ]  $x$  について [                    ] 。」 ◀「 $\sim$ である」の表現  
 真偽：  $x = [                    ]$  のとき、  
 $(x+1)^2 = ([                    ] + 1)^2 = [                    ]$  だから [ 真 ・ 偽 ] 。（正しい方に○）
- (2) 否定：「 [                    ]  $n$  について [                    ] 。」  
 = 「 [                    ]  $n$  について [                    ] 。」 ◀「 $\sim$ である」の表現  
 真偽： [                    ] から [ 真 ・ 偽 ] 。（正しい方に○）



1 5

第1章 数と式 第4節 集合と命題

4 「すべて」と「ある」

(4/6) ■ 「すべて」と「ある」の否定 ■

◇ 《「すべて」と「ある」の否定》 **学力化** → /

★演習★【2】

次の命題の否定を述べなさい。また、否定の真偽を調べなさい。

- (1) すべての実数  $x$  について  $x^2 > 0$
- (2) ある素数は偶数である。
- (3) 任意の実数  $x, y$  に対して  $x^2 - 4xy + 4y^2 > 0$
- (4)  $x^2 - 3x - 10 = 0$  である自然数  $x$  が存在する。

【考え方】 (3) 任意の実数 = すべての実数 → No. 15 (1/6) を参照

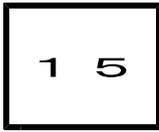
(4) 命題を読みかえます。

「ある自然数  $x$  に対して  $x^2 - 3x - 10 = 0$ 」

この読みかえた命題を否定します。

[答 案]

- (1) 否定: 「 [ ]  $x$  について [ ] 。」  
 = 「 [ ]  $x$  について [ ] 。」 ◀「 $\sim$ である」の表現  
 真偽:  $x = [ ]$  のとき,  
 $x^2 = ( [ ] )^2 = [ ]$  だから [ 真・偽 ]。(正しい方に○)
- (2) 否定: 「 [ ] は [ ] 。」  
 = 「 [ ] は [ ] 。」 ◀「 $\sim$ である」の表現  
 真偽: [ ] から [ 真・偽 ]。(正しい方に○)
- (3) 否定: 「 [ ]  $x, y$  に対して [ ] 。」  
 = 「 [ ]  $x, y$  に対して [ ] 。」  
 真偽: [ ] のとき,  
 [ ] だから [ 真・偽 ]。(正しい方に○)
- (4) 否定: 「 [ ]  $x$  に対して [ ] 。」  
 = 「 [ ]  $x$  に対して [ ] 。」  
 真偽:  $x = [ ]$  のとき,  
 $x^2 - 3x - 10 = ( [ ] )^2 - 3 \times [ ] - 10 = [ ]$  だから  
 [ 真・偽 ]。(正しい方に○)



第1章 数と式 第4節 集合と命題

4 「すべて」と「ある」

(5/6) ■ 「すべて」と「ある」の否定 ■

◇ 《「すべて」と「ある」の否定》 **学力化** → /

★演習★【3】

次の命題の否定を述べなさい。また、否定の真偽を調べなさい。

- (1) 少なくとも1つの自然数  $n$  について  $n^2 - 5n - 6 = 0$
- (2) すべての実数  $x, y$  について  $9x^2 - 12xy + 4y^2 > 0$
- (3) ある自然数  $m, n$  について  $2m + 3n = 6$

【考え方】 (1) 「少なくとも1つの自然数」 = 「ある自然数」 (1/6) 知識の整理参照

[答 案]

(1) 否定: 「 [ ]  $n$  について [ ] 。」

= 「 [ ]  $n$  について [ ] 。」

真偽:  $n = [ ]$  のとき,

$$n^2 - 5n - 6 = 0 = ([ ])^2 - 5 \times [ ] - 6 = [ ] \text{ だから}$$

[ 真 ・ 偽 ]。(正しい方に○)

(2) 否定: 「 [ ]  $x, y$  について [ ] 。」

= 「 [ ]  $x, y$  について [ ] 。」

真偽: [ ] のとき,

[ ] だから [ 真 ・ 偽 ]。(正しい方に○)

(3) 否定: 「 [ ]  $m, n$  について [ ] 。」

= 「 [ ]  $m, n$  について [ ] 。」

真偽: \* 難しいので解答のみ示します。研究してみてください。

$$m = 1, n = 1 \text{ のとき } 2m + 3n = \underline{5} (\neq 6)$$

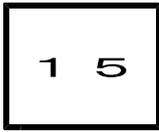
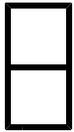
$m \geq 2$  かつ  $n$  はすべての自然数のとき (最小値の1を代入してみる)

$$2m + 3n \geq 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = \underline{7} \text{ から } 2m + 3n \neq 6$$

$n \geq 2$  かつ  $m$  はすべての自然数のとき (最小値の1を代入してみる)

$$2m + 3n \geq 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = \underline{8} \text{ から } 2m + 3n \neq 6$$

したがって, [ 真 ・ 偽 ]。(正しい方に○)



第1章 数と式 第4節 集合と命題

**4** 「すべて」と「ある」

(6/6) ■ 「すべて」と「ある」の否定 ■

◇ 《「すべて」と「ある」の否定》 **学力化** → /

★演習★【4】

次の命題の否定を述べなさい。また、否定の真偽を調べなさい。

- (1) ある素数の組  $(a, b)$  について、 $a$  と  $b$  の積  $ab$  は偶数である。
- (2) ある実数  $x$  について、 $x^2 = -1$  である。
- (3) すべての素数は奇数である。
- (4) 2つの無理数の積は無理数である。
- (5) ひし形は平行四辺形である。

【考え方】 「～でない」をいう形で否定し、それを「～である」という表現に書きかえます。

わかれば、いきなり「～である」をいう形で否定してもかまいません。

(4), (5) では、文の先頭に「すべての」を補うと意味が取りやすくなります。

[答 案]

(1) 否定 : .....  
= .....

真偽 : .....

(2) 否定 : .....  
= .....

真偽 : .....

(3) 否定 : .....  
= .....

真偽 : .....

(4) 否定 : .....  
= .....

真偽 : .....  
.....

(5) 否定 : .....  
真偽 : .....