22

第１章　数と式　２・実数

4　２重根号（その１）

（１／１０）■　２重根号のはずし方　■

２重根号のはずしかた（解説）

★知識の整理★

▼　２重根号のはずし方　▼

ａ＞０，ｂ＞０のとき，$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

ａ＞ｂ＞０　　のとき，$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

【１】２重根号の性質

根号の中に根号をもつ式（２重根号）は，以下のようにして１つの根号で表せる場合がある。

（ｉ）ａ＞０，ｂ＞０のとき，

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$$

ここで，$\sqrt{A}$ の定義

２乗してＡ（Ａ＞０）となる正の整数を $\sqrt{A}$ で表す

から，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ は２乗して $a+b+2\sqrt{ab}$（＞０）となり，かつ，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$ であるから，上の定義により

$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\quad\cdots①$$ が成り立つ。

（ii）ａ＞ｂ＞０のとき，

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{ab}$$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ は２乗して $a+b-2\sqrt{ab}$（＞０）となり，かつ，$\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ であるから，上の定義により

$$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}\quad\cdots②$$ が成り立つ。

【２】２重根号のはずし方

よって，$\sqrt{\chi\pm2\sqrt{y}}$ の２重根号は，次のようにしてはずす。

1　$ab=y$，$a+b=\chi$（掛けてｙ，加えてχ）となる２数ａ，ｂを見つけて，

2　$\sqrt{\chi+2\sqrt{y}}=\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$　（ただし，ａ＞０，ｂ＞０）

　$\sqrt{\chi-2\sqrt{y}}=\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$　（ただし，ａ＞ｂ＞０）

【注意】根号の中の根号の前に２がついているときにのみ，この方法は使える。

２重根号のはずし方（基本形）

◇《２重根号のはずし方(基本形)》学力化➡　　／　，

★解法の技術★

２重根号をはずして，次の式を簡単にしなさい。

(1)　$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$　　　(2)　$\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

【考え方】(1)　$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ より，
「かけて３になる２数のうち，その和が４になる」組み合わせを見つける。
ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

(2)　$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ より，
「かけて６になる２数のうち，その和が５になる」組み合わせを見つける。
ただし，$a>b>0$ とする。

［考える手順］　［答　案］

(1)　$\sqrt{4+2\sqrt{3}}$　　◀かけて３，たして４になる

1　和と積で書きかえる　$=\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\cdot 1}}$　　２数は，３と１

2　２重根号をはずす　$=\sqrt{3}+\sqrt{1}$

$=\underline{\sqrt{3}+1}$

(2)　$\sqrt{5-2\sqrt{6}}$　　◀かけて６，たして５になる

1　和と積で書きかえる　$=\sqrt{(3+2)-2\sqrt{3\cdot 2}}$　　２数は，３と２

2　２重根号をはずす　$=\underline{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

２２

第１章　数と式　２・実数

4　２重根号（その１）

■　２重根号のはずし方　■

◇《２重根号のはずし方(基本形)》 学力化➡　／　,

★理解のチェック★

２重根号をはずして，次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$　　(2) $\sqrt{9-2\sqrt{20}}$　　(3) $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$

［考える手順］　［答　案］

(1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

1 和と積で書きかえる　$=$

2 ２重根号をはずす　$=$

$=$

(2) $\sqrt{9-2\sqrt{20}}$

1 和と積で書きかえる　$=$

2 ２重根号をはずす　$=$

$=$

(3) $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$

1 和と積で書きかえる　$=$

2 ２重根号をはずす　$=$

２２

第１章　数と式　２・実数

４　２重根号（その１）

（４／１０）■　２重根号のはずし方　■

◇《２重根号のはずし方(基本形)》 **学力化**➡　　／　，

★演習★【１】

２重根号をはずして，次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$　　(2) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$　　(3) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$

［答　　案］

２２

第１章　数と式　２・実数

4　２重根号（その１）

（５／１０）■　２重根号のはずし方　■

２重根号のはずし方（２$\sqrt{\ }$を作る①）

◇《２重根号のはずし方（２$\sqrt{\ }$を作る①）》学力化➡　／　，

★演習★【２】

２重根号をはずして，次の式を簡単にしなさい。

(1)　$\sqrt{5-\sqrt{24}}$　　(2)　$\sqrt{10-\sqrt{84}}$　　(3)　$\sqrt{8-\sqrt{48}}$

【考え方】２$\sqrt{\ }$を作るために，$\sqrt{\ }$の中の2^2を外へ出します。

たとえば，

(1)　$\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{5-\sqrt{2^2\times6}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

と変形してから２重根号をはずします。

［答　　案］

２２

第１章　数と式　２・実数

4　２重根号（その１）

（６／１０）■　２重根号のはずし方　■

２重根号のはずし方（$2\sqrt{}$ を作る②）

◇《２重根号のはずし方（$2\sqrt{}$ を作る②）》 学力化➡　／　,

★演習★【３】

２重根号をはずして，次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$　　(2) $\sqrt{10+4\sqrt{6}}$　　(3) $\sqrt{42+12\sqrt{6}}$

【考え方】$2\sqrt{}$ を作るために，$\sqrt{}$ の前の２以外の因数を平方数にして $\sqrt{}$ の中へ入れます。

たとえば，

(1) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{9+2\sqrt{2^2\times 2}}=\sqrt{9+2\sqrt{8}}$

と変形してから２重根号をはずします。

［答　　案］

２２

第１章　数と式　２・実数

４　２重根号（その１）

（７／１０）■　２重根号のはずし方　■

２重根号のはずし方（$2\sqrt{}$ を作る③）

◇《２重根号のはずし方（$2\sqrt{}$ を作る③）》学力化➡　／　，

★演習★【４】

２重根号をはずして，次の式を簡単にしなさい。

(1)　$\sqrt{3-\sqrt{5}}$　　(2)　$\sqrt{4-\sqrt{15}}$　　(3)　$\sqrt{6+\sqrt{35}}$　　(4)　$\sqrt{2+\sqrt{3}}$

【考え方】$2\sqrt{}$ を作るために，$\sqrt{}$ の中の数全体を２倍して２でわっておきます。

たとえば，

$$\sqrt{a+b\sqrt{c}}=\sqrt{\frac{2a+2b\sqrt{c}}{2}}=\frac{\sqrt{2a+2b\sqrt{c}}}{\sqrt{2}}$$

と変形してから２重根号をはずします。

分母の$\sqrt{2}$ は最後に有理化しておきます。

［答　　案］

＊Sample

(1)　$\sqrt{3-\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}$　◀2倍して2でわる

$=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}$　◀分子と分母に分ける　◀かけて　5×1　たして　5＋1＝6

$=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$　◀分子の2重根号をはずす

$=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$　◀有理化は結果だけを書く

２２

第１章　数と式　２・実数

4　２重根号（その１）

■　２重根号のはずし方　■

２重根号のはずし方（２$\sqrt{\ }$を作る④）

◇《２重根号のはずし方（２$\sqrt{\ }$を作る④）》学力化➡　　／　，

★演習★【５】

２重根号をはずして，次の式を簡単にしなさい。

(1)　$\sqrt{9-3\sqrt{5}}$　　(2)　$\sqrt{20-5\sqrt{15}}$　　(3)　$\sqrt{15-5\sqrt{5}}$　　(4)　$\sqrt{6+3\sqrt{3}}$

【考え方】③→②の２つの手順で，２重根号をはずします。

＊分母の$\sqrt{2}$は最後に有理化しておきます。

［答　　案］

＊Sample

(1)　$\sqrt{9-3\sqrt{5}}$

$=\sqrt{\dfrac{18-2\times3\sqrt{5}}{2}}$　◀2倍して2でわる

$=\dfrac{\sqrt{18-2\sqrt{3^2\times5}}}{\sqrt{2}}$　◀内側の根号の前の2以外の因数を平方数にして根号の中へ入れる

$=\dfrac{\sqrt{18-2\sqrt{3\times(3\times5)}}}{\sqrt{2}}$　◀内側の根号の中の因数の組合せを変えて，和が18になる2数を調べる

$=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　◀分子の2重根号をはずす

$=\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{2}$　◀有理化は結果だけを書く

２２

第１章　数と式　２・実数

4　２重根号（その１）

（９／１０）■　２重根号のはずし方　■

２重根号のはずし方（混合問題）

◇《２重根号のはずし方(混合問題)》学力化➡　　／　,

★演習★【６】

次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$　　(2) $\sqrt{9-2\sqrt{14}}$　　(3) $\sqrt{16+6\sqrt{7}}$

(4) $\sqrt{8-\sqrt{48}}$　　(5) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$

［答　　案］

２２

第１章　数と式　２・実数

４　２重根号（その１）

（１０／１０）■　２重根号のはずし方　■

◇《２重根号のはずし方(混合問題)》 **学力化**➡　　／　,

★演習★【７】

次の式を簡単にしなさい。

(1) $\sqrt{15+2\sqrt{56}}$　　(2) $\sqrt{11-\sqrt{40}}$　　(3) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$

(4) $\sqrt{7+\sqrt{33}}$　　(5) $\sqrt{8+3\sqrt{7}}$

［答　　案］