

## 第1章 数と式 2・実数

## 3 平方根 (その6)

(1/9) ■ 整数部分, 小数部分 ■

## (1) 有理化の必要な問題

◇ 《整数部分, 小数部分と式の値》 学力化 →

## ★解法の技術★

$\frac{2}{3-\sqrt{7}}$  の整数部分を  $a$ , 小数部分を  $b$  とする。

このとき,  $a$ ,  $b$ ,  $a^2 + 2ab + 3b^2$ ,  $b^3 + \frac{27}{b^3}$  の値を求めなさい。

【考え方】 次の4ステップで解きます。

0 与式を有理化しておく。(これは問題を解くに当たっての前処理です)

1 与式の整数部分  $a$  の値を求める。

2 与式の小数部分  $b$  の値を求める。

3  $a^2 + 2ab + 3b^2$  の値を, 次の手順で求める。

①  $a^2 + 2ab + 3b^2$  を基本対称式で表す。

② 基本対称式に数値を代入する。

4  $b^3 + \frac{27}{b^3}$  の値を, 次の手順で求める。

①  $b^3 + \frac{27}{b^3}$  を基本対称式で表す

②  $\frac{3}{b}$  を有理化し, 基本対称式  $b + \frac{3}{b}$  の値を求める。

③ 基本対称式に②の数値を代入する

[考える手順]

0 与式を有理化する

1 整数部分を求める

[答 案]

与式を有理化すると,

$$\frac{2}{3-\sqrt{7}} = \frac{2(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} = \frac{2(3+\sqrt{7})}{9-7} = 3 + \sqrt{7}$$

与式の整数部分  $a$  を求めると,

$$4 < 7 < 9$$

$$\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$$

$$2 < \sqrt{7} < 3$$

辺々+3

$$3 + 2 < 3 + \sqrt{7} < 3 + 3$$

$$5 < 3 + \sqrt{7} < 6$$

よって,  $a = 5$

(次のページへつづく) →

## □ □ 【実数 No. 21 (1/9)】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

2 小数部分を求める

与式の小数部分  $b$  を求めると、

$$\begin{aligned} b &= (3 + \sqrt{7}) - a \\ &= (3 + \sqrt{7}) - 5 \\ &= \underline{\sqrt{7} - 2} \end{aligned}$$

3  $a^2 + 2ab + 3b^2$  の値 $a^2 + 2ab + 3b^2$  を基本対称式を含む式で表して、 ◀  $a$  計算を楽にする

$$\begin{aligned} &(a^2 + 2ab + b^2) + 2b^2 \\ &= (a + b)^2 + 2b^2 \\ &= \{5 + (\sqrt{7} - 2)\}^2 + 2(\sqrt{7} - 2)^2 \\ &= (3 + \sqrt{7})^2 + 2(\sqrt{7} - 2)^2 \\ &= 9 + 6\sqrt{7} + 7 + 14 - 8\sqrt{7} + 8 \\ &= \underline{38 - 2\sqrt{7}} \end{aligned}$$

◀  $a, b$  に直接代入する4  $b^3 + \frac{27}{b^3}$  の値 $b^3 + \frac{27}{b^3}$  を基本対称式で表すと、

$$\begin{aligned} &b^3 + \left(\frac{3}{b}\right)^3 \\ &= \left(b + \frac{3}{b}\right)^3 - 3 \cdot b \cdot \frac{3}{b} \cdot \left(b + \frac{3}{b}\right) \\ &= \left(b + \frac{3}{b}\right)^3 - 9\left(b + \frac{3}{b}\right) \end{aligned}$$

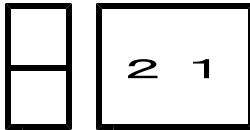
ここで、 $\frac{3}{b}$  を有理化すると

$$\frac{3}{b} = \frac{3}{\sqrt{7} - 2} = \frac{3(\sqrt{7} + 2)}{(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 2)} = \frac{3(\sqrt{7} + 2)}{7 - 4} = \sqrt{7} + 2$$

$$\text{であるから、 } b + \frac{3}{b} = (\sqrt{7} - 2) + (\sqrt{7} + 2) = 2\sqrt{7}$$

よって、求める式の値は、

$$\begin{aligned} b^3 + \frac{27}{b^3} &= (2\sqrt{7})^3 - 9(2\sqrt{7}) \\ &= 56\sqrt{7} - 18\sqrt{7} \\ &= \underline{38\sqrt{7}} \end{aligned}$$



## 第1章 数と式 2・実数

## 3 平方根 (その6)

(2/9) ■ 整数部分, 小数部分 ■

◇ 《整数部分, 小数部分と式の値》 **学力化** → /

★理解のチェック★

$\frac{6}{3+\sqrt{3}}$  の小数部分を  $m$  とするとき,  $m^2 + \frac{1}{m^2}$  の値を求めなさい。

【考え方】 無理数の小数部分を求めるには, 整数部分を求めておく必要があります。

[考える手順]

0 与式を有理化する

1 整数部分を求める

2 小数部分を求める

4  $m^2 + \frac{1}{m^2}$  の値

[答 案]

与式を有理化すると,

$$\frac{6}{3+\sqrt{3}} =$$

与式の整数部分  $a$  を求めると,与式の小数部分  $m$  を求めると,
 $m^2 + \frac{1}{m^2}$  を基本対称式で表すと,

□ □ 【実数 No. 21 (2/9)】 - 〈2枚目/2枚〉

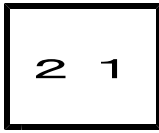
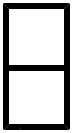
↗ (前のページからのつづき)

ここで、 $\frac{1}{m}$ を有理化すると

であるから、 $m + \frac{1}{m} =$

よって、求める式の値は、

$$m^2 + \frac{1}{m^2} =$$



第1章 数と式 2・実数

3 平方根（その6）

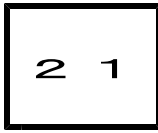
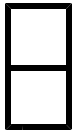
(3/9) ■ 整数部分, 小数部分 ■

◇ 《整数部分, 小数部分と式の値》 **学力化** → / ,

★演習★【1】

$a = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$  の整数部分を  $p$ , 小数部分を  $q$  とするとき,  $p^2 + 2pq + 4q^2$  の値を求めなさい。

[答 案]



## 第1章 数と式 2・実数

## 3 平方根（その6）

(4/9) ■ 整数部分, 小数部分 ■

◇ 《整数部分, 小数部分と式の値》 **学力化** → / ,

## ★演習★【2】

$\frac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$  の整数部分を  $a$ , 小数部分を  $b$  とするとき,

- (1)  $a$  の値を求めなさい。
- (2)  $b + \frac{2}{b}$  の値を求めなさい。

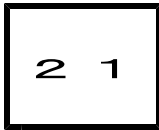
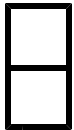
【考え方】 (1) まず最初に分母の有理化をしないと, 先が見えません。

分母の有理化は, 分母に平方根を含む問題の「突破口」です。

$a$  の値を求めるとき, 不等式の筆算 を使います。不等式の筆算をまだ学習していない場合は, 先生に教えてもらって下さい。

(2) No. 2 1 ★解法の技術★を参照。

[答 案]



## 第1章 数と式 2・実数

## 3 平方根（その6）

(5/9) ■ 整数部分, 小数部分 ■

◇ 《対称式でない式の値》 **学力化** → / ,

## ★演習★【3】

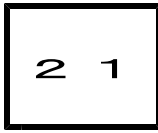
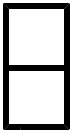
$\frac{1}{2-\sqrt{3}}$  の整数部分が  $a$  , 小数部分が  $b$  のとき,

- (1)  $a$  ,  $b$  の値を求めなさい。
- (2)  $\frac{a+b^2}{3b}$  , および  $a^2-b^2-2a-2b$  の値を求めなさい。

【考え方】 (2) は対称式ではありません。だから、次の手順で解きます。

- ・  $\frac{a+b^2}{3b}$  は、 $a$  ,  $b$  の値を直接代入して式の値を求める。
- ・  $a^2-b^2-2a-2b$  は、
  - ①最初に、 $a^2-b^2-2a-2b$  を因数分解しておく、
  - ②次に、その式に、 $a$  ,  $b$  の値を代入し、式の値を求める。

[答 案]



第1章 数と式 2・実数

3 平方根 (その6)

(6/9) ■ 整数部分, 小数部分 ■

## (2) 有理化をしない問題

◇ 《整数部分, 小数部分と式の値》 **学力化** → / ,

★演習★【4】

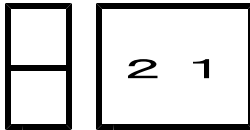
$5 - \sqrt{3}$  の整数部分を  $a$ , 小数部分を  $b$  とする。

このとき,  $a$ ,  $b$  および  $2a^2 - (b^2 + \frac{1}{b^2})$  の値を求めなさい。

【考え方】  $5 - \sqrt{3}$  が分数でないので, 有理化は必要ありません。

[答 案]





第1章 数と式 2・実数

**3** 平方根（その6）

（7／9） ■ 整数部分，小数部分 ■

◇ 《整数部分，小数部分と式の値》 **学力化** → / ,

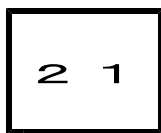
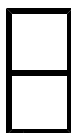
★演習★【5】

$1 + \sqrt{5}$  の整数部分を  $a$ ，小数部分を  $b$  とするとき，次の値を求めなさい。

(1)  $a$ ， $b$  の値

(2)  $b + \frac{1}{b}$ ， $b^3 + \frac{1}{b^3}$  の値

[答 案]



第1章 数と式 2・実数

**3** 平方根(その6)

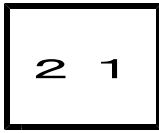
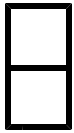
(8/9) ■ 整数部分, 小数部分 ■

◇《整数部分, 小数部分と式の値》**学力化**→ / ,

★演習★【6】

$\sqrt{5}$  の小数部分を  $a$  とするとき,  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{a^3} - a^3$  の値を求めなさい。

[答 案]



第1章 数と式 2・実数

**3** 平方根（その6）

（9 / 9） ■ 整数部分，小数部分 ■

◇ 《整数部分，小数部分と式の値》 **学力化** → / ,

★演習★【7】

$4 + 2\sqrt{5}$  の整数部分を  $a$ ，小数部分を  $b$  とするとき， $a$ ， $b$ ， $a^2 + b^2$  の値を求めなさい。

[答 案]