■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

	１３	第５章　微分と積分　３・積分 **3** 面積と定積分（その１） （１／６）■　定積分と図形の面積①　■

χ 軸（y＝0）を使って

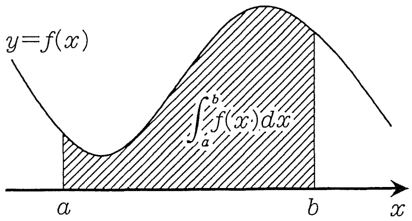
★知識の整理★

【１】χ 軸と $f(\chi)$ と面積(1)

a ≦ χ ≦ b の範囲で $f(\chi)\geqq 0$ のとき，y＝$f(\chi)$ のグラフと χ 軸および２直線 χ＝a，χ＝b で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_a^b\{f(\chi)-0\}dx$$

で求められる。　◀ χ 軸をy＝0のグラフとみなす。

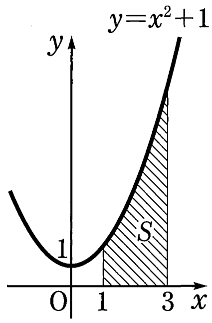


（例）　放物線 y＝χ^2＋１と χ 軸および χ＝１，χ＝３とで囲まれた部分の面積 S を求めてみよう。

１≦ χ ≦３の範囲で y＝χ^2＋１＞０であるから，

$$S=\int_1^3\{(\chi^2+1)-0\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}\chi^3+\chi\right]_1^3=\frac{32}{3}$$

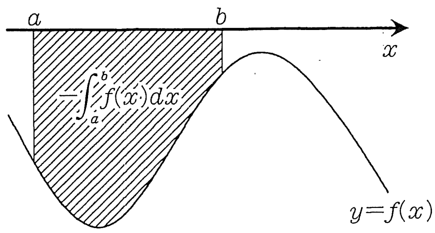


【２】χ 軸と $f(\chi)$ と面積(2)

a ≦ χ ≦ b の範囲で $f(\chi)\leqq 0$ のとき，y＝$f(\chi)$ のグラフと χ 軸および２直線 χ＝a，χ＝b で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_a^b\{0-f(\chi)\}dx$$

で求められる。　◀ χ 軸をy＝0のグラフとみなす。



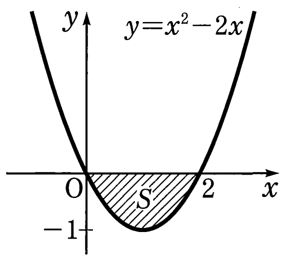
（例）　放物線 y＝χ^2－２χ と χ 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めてみよう。

この放物線と χ 軸との交点の χ 座標は，χ^2－２χ＝０を解いて，χ＝０，２

０≦ χ ≦２の範囲で y＝χ^2－２χ＜０であるから，

$$S=\int_0^2\{0-(\chi^2-2\chi)\}dx$$

$$=-\left[\frac{1}{3}\chi^3-\chi^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$



（次のページへつづく）↗

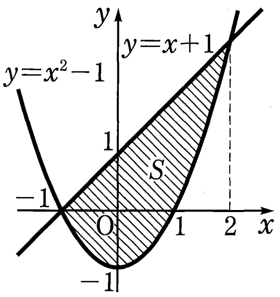
■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

↗（前のページからのつづき）

【注】なお，【１】，【２】は次のような一つの考え方で解けます。この考え方はχ軸に限らず，放物線と放物線，放物線と直線（傾きが０以外のもの）や３次関数のグラフが作る面積等々，あらゆる場面の面積を求めるのに使える最も広い応用力のある考え方です。

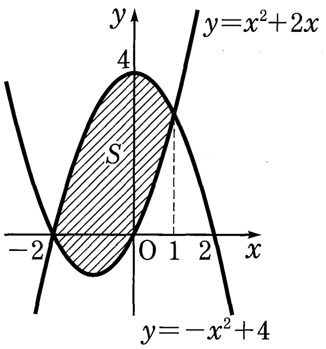
> 「図をかいて，上ー下の$\int$」で求めます。（χ軸をｙ＝０のグラフとみなす。）

＊後で学びますが，次のような場合も上の考え方で面積を求めることができます。



$$S=\int_{-1}^{2}\{(\chi+1)-(\chi^2-1)\}dx$$

上　ー　下



$$S=\int_{-2}^{1}\{(-\chi^2+4)-(\chi^2+2\chi)\}dx$$

上　ー　下

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

★解法の技術★

次の面積を求めなさい。

(1) 放物線 $y=2x^2+1$ と x 軸および２直線 $x=-2$，$x=1$ で囲まれた部分の面積

(2) 放物線 $y=x^2+x-6$ と x 軸および２直線 $x=-2$，$x=1$ で囲まれた部分の面積

(3) 放物線 $y=x^2+3x+2$ と x 軸で囲まれた部分の面積

(4) 放物線 $y=-x^2+4$ と x 軸で囲まれた部分の面積

【考え方】「図をかいて，上ー下の $\int$ 」で求めます。（x 軸を $y=0$ のグラフとみなす。）

(3)，(4) 交点から交点までの面積を求めるときは「マイナス６分の１の公式」を使います。ただし，x^2 の係数が１の場合のみ。計算がメッチャ速いです。

「マイナス６分の１の公式」を忘れた人は→№６（１／１０）

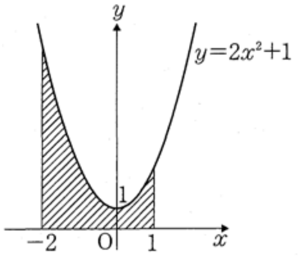
［考える手順］

［答　　案］

(1)

1 図をかく

2 面積を求める（上ー下の $\int$ ）

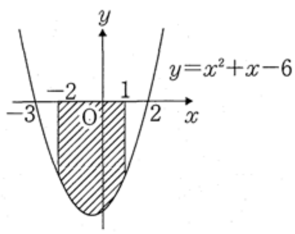


$$S=\int_{-2}^{1}\{(2x^2+1)-0\}dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(2x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3+x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left(\frac{2}{3}+1\right)-\left(-\frac{16}{3}-2\right)$$
$$=\frac{5}{3}-\left(-\frac{22}{3}\right)=\underline{9}$$

(2)

1 図をかく

2 面積を求める（上ー下の $\int$ ）



$$S=\int_{-2}^{1}\{0-(x^2+x-6)\}dx$$
$$=-\int_{-2}^{1}(x^2+x-6)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{1}$$
$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+6\right)-\left(\frac{8}{3}-2-12\right)$$
$$=\frac{31}{6}-\left(-\frac{34}{3}\right)=\underline{\frac{33}{2}}$$

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

↗（前のページからのつづき）

0 グラフの交点を求める

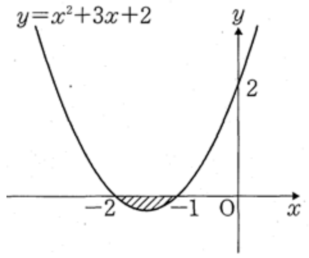
1 図をかく

(3) 放物線と χ 軸との交点の χ 座標は，

$$\chi^2+3\chi+2=0$$

$$(\chi+2)(\chi+1)=0$$

$$\chi=-2,\ -1$$



2 面積を求める

$$S=\int_{-2}^{-1}\{0-(\chi^2+3\chi+2)\}\,d\chi$$

◀交点から交点までも面積だから「マイナス6分の1の公式」が使える

$$=\int_{-2}^{-1}(-\chi^2-3\chi-2)\,d\chi$$

$$=-\int_{-2}^{-1}(\chi^2+3\chi+2)\,d\chi$$

◀【注意！】 χ^2 の係数は1にする

$$=-\left[-\frac{1}{6}\{-1-(-2)\}^3\right]$$

$$=\frac{1}{6}$$

「マイナス6分の1の公式」は，χ^2 の係数が1の場合にのみ使えるので χ^2 の－は $\int$ の外に出しておく。

また，(　)の式は全く使わないので式変形をする必要はない。

0 グラフの交点を求める

1 図をかく

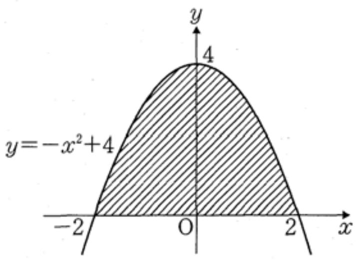
(4) 放物線と χ 軸との交点の χ 座標は，

$$-\chi^2+4=0$$

$$\chi^2-2^2=0$$

$$(\chi+2)(\chi-2)$$

$$\chi=-2,\ 2$$



2 面積を求める

$$S=\int_{-2}^{2}\{(-\chi^2+4)-0\}\,d\chi$$

$$=\int_{-2}^{2}(-\chi^2+4)\,d\chi$$

$$=-\int_{-2}^{2}(\chi^2-4)\,d\chi$$

◀【注意！】 χ^2 の係数は1にする

$$=-\left[-\frac{1}{6}\{2-(-2)\}^3\right]$$

◀マイナス6分の1の公式

$$=\frac{32}{3}$$