■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

《解答書》

発展 ＊１３

第２章　図形と方程式　２・円と直線

２ 円と直線（その４）

【No.１３の後で学習☆発展問題】（５／７）

◇《放物線と円の共有点・接点》学力化➡　　／　，

◇発展演習◇【３】

放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ …①と円 $x^2+(y-a)^2=r^2$ （$a>0$，$r>0$）…②について，次の条件を満たすような a の値の範囲を求め，r を a の式で表せ。

(1) 放物線①と円②が原点Ｏで接し，かつ他に共有点をもたない。

(2) 放物線①と円②が異なる２点で接する。

【考え方】《パターン３》円の半径と中心が動く問題（拡大・縮小／y 軸上を移動）

・放物線と円の共有点についても，これまで学習した方針

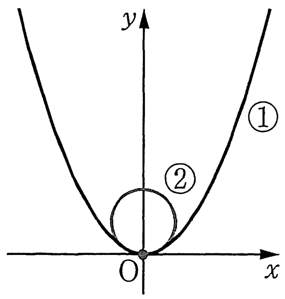
共有点 ⟺ 実数解　　接点 ⟺ 重解

で考えればよい。

・この問題では，x を消去して，
y の２次方程式 $2y+(y-a)^2=r^2$ の重解
を考える。　◀yを消去すると x^4 が現れて難しくなる。

［答　案］

０ （放物線と円の方程式を連立し，yについての２次方程式を作る）



①より，$x^2=2y$ であり，$y\geqq 0$
これを②に代入すると，$2y+(y-a)^2=r^2$
これを y について整理して，

$$y^2+2(1-a)y+(a^2-r^2)=0 \quad \cdots③$$

◀yの範囲は $y\geqq 0$ である。

(1) ・放物線①と円②が原点Ｏで接し，かつ他に共有点をもたないのは，y の２次方程式③が $y=0$ を解にもち，$y>0$ の範囲に解をもたないときである。

$y=0$ が解であるから，

$a^2-r^2=0$ 　◀$0^2+2(1-a)\cdot 0+(a^2-r^2)=0$

$a>0$，$r>0$ であるから，$r=a$ 　◀$a^2=r^2$

このとき，③は， 　◀ r を消去

$y^2+2(1-a)y=0$ 　◀$y^2+2(1-a)y+(a^2-a^2)=0$

$y\{y+2(1-a)\}=0$ 　◀因数分解（③の解を求める

よって，③の $y=0$ 以外の解は 　☆下記【注】を参照⬇

$y=2(a-1)$ 　◀$-2(1-a)=2(a-1)$

$2(a-1)\leqq 0$ より，$0<a\leqq 1$ 　◀これが正であってはいけない。

したがって，$0<a\leqq 1$，$r=a$ 　◀$2(a-1)=0$ のときも含まれることに注意すること。

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

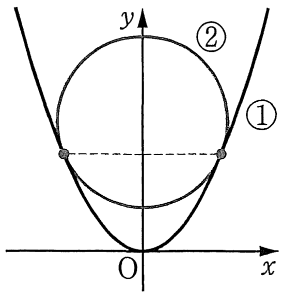
《 解 答 書 》

□ □ 【円と直線 No. １３ｓ（５／７）】 ー〈２枚目／２枚〉

↗ （前のページからのつづき）

【注】共有点が原点のみであるから，ｙ≧０においては，
ｙ＝０しか解はない。
また，このとき，グラフの対称性から，原点で接するといえる。

(2) 放物線①と円②が異なる２点で接するのは，
ｙの２次方程式③が正の重解をもつときである。



③の判別式をＤとすると，Ｄ＝０

$$\frac{D}{4}=(1-a)^2-1\cdot(a^2-r^2)$$
$$=r^2-2a+1$$

よって，$r^2-2a+1=0$

1 （rをaの式で表す）

$r^2=2a-1\geqq0$ より，$a\geqq\frac{1}{2}$ であり，$r>0$ より，

$r=\sqrt{2a-1}$

2 （重解が正となるaの条件を求める）

このとき，③は $y^2+2(1-a)y+a^2-(2a-1)=0$ ◀ r を消去する。

$\{y+(1-a)\}^2=0$ ◀因数分解

よって，③の解は，$y=-(1-a)=a-1$

$a-1>0$ より，$a>1$ ◀③は正の重解

3 （答をまとめる）

したがって，$a>1$ ，$r=\sqrt{2a-1}$ ◀$a\geqq\frac{1}{2}$ かつ $a>1$ より，$a>1$

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

《 解 答 書 》

発展 ＊１３

第２章　図形と方程式　２・円と直線

2 円と直線（その４）

【No.１３の後で学習☆発展問題】（６／７）

◇《放物線と円の共有点・接点》学力化➡　／　，

★解法の技術★

放物線 $y=\frac{1}{2}\chi^2$ …①と円 $\chi^2+(y-a)^2=r^2$ （$a>0$，$r>0$）…②について，

次の条件を満たすような a の値の範囲を求め，r を a の式で表せ。

(1) 放物線①と円②が原点Ｏで接し，かつ他に共有点をもたない。

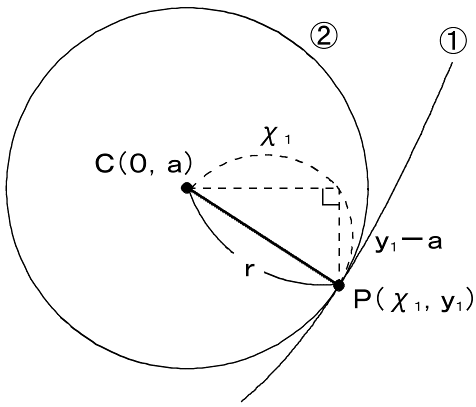
(2) 放物線①と円②が異なる２点で接する。

【注】この問題は，◇発展演習◇【３】の別解です。

【考え方】《パターン３：円の半径と中心が動く問題（拡大・縮小／ｙ軸上を移動）》

・放物線①上に点 $P(\chi_1,\ y_1)$ をとり，円②の中心 $C(0,\ a)$ との距離ＣＰの式を求める。（三平方の定理）

・放物線①上の点 $P(\chi_1,\ y_1)$ と円②の中心 $C(0,\ a)$ との距離ＣＰの最小値が円の半径と一致するとき，その最小となる点で放物線①と円②は接する。



［答　　案］

0 （定義）

・放物線①上の点を $P(\chi_1,\ y_1)$ とおくと，

$y_1=\frac{1}{2}\chi_1^2$ より，$\chi_1^2=2y_1$ …③

また，③より，$y_1\geqq 0$ ◀ y_1 の範囲

・円②の中心は点 $(0,\ a)$ であり，半径は r （$a>0$，$r>0$）である。◀円の半径

・ここで，円②の中心 $(0,\ a)$ をＣとおき，
円の中心から放物線までの最短距離について考えると，

$CP^2=\chi_1^2+(y_1-a)^2$ ◀三平方の定理

$=2y_1+y_1^2-2ay_1+a^2$ ◀③より，$\chi_1^2=2y_1$

$=y_1^2-2(a-1)y_1+a^2$ ◀ y_1 について整理

$=y_1^2-2(a-1)y_1+(a-1)^2-(a-1)^2+a^2$ ◀平方完成

$=\{y_1-(a-1)\}^2+2a-1$ （$y_1\geqq 0$） ◀ CP^2 の標準形

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

↗（前のページからのつづき）

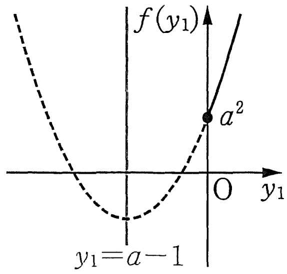
◀最小値をとるy_1を求めるために，軸の位置を考え，場合分けをする。

(1) 1 （CPの最小値を求める）

$f(y_1)=\{y_1-(a-1)\}^2+2a-1$　（$y_1 \geqq 0$）のグラフにおいて，
軸の位置を考えると，

$a-1 \leqq 0$　すなわち　$0<a \leqq 1$のとき，
CP^2は$y_1=0$のとき，最小値a^2

◀$CP^2=\{0-(a-1)\}^2+2a-1=a^2$



すなわち，CPは$y_1=0$のとき，最小値aとなり，

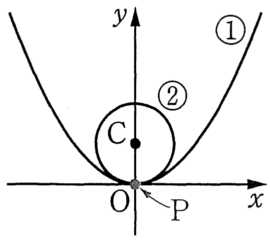
◀OP＞0より，OP^2が最小のとき，OPも最小となる。

③より，$y_1=0$のとき，$x_1=0$　◀①と②は原点で接する。

2 （答をまとめる）

したがって，求めるaの値の範囲は，$0<a \leqq 1$
rをaの式で表すと，$r=a$

◀円の中心は，条件より(0，a)



(2) 1 （CPの最小値を求める）

$f(y_1)=\{y_1-(a-1)\}^2+2a-1$　（$y_1 \geqq 0$）のグラフにおいて，
軸の位置を考えると，

$0<a-1$　すなわち　$1<a$のとき，

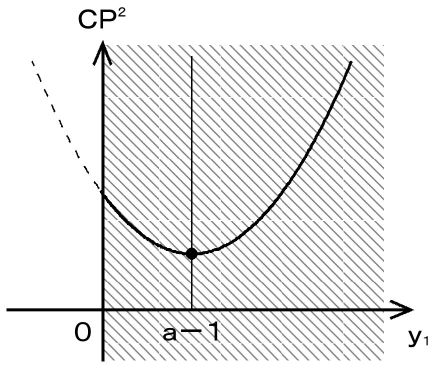
CP^2は$y_1=a-1$のとき，最小値$2a-1$

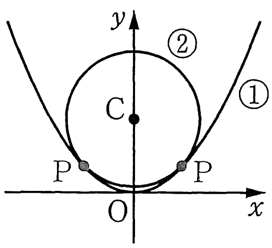
すなわち，CPは$y_1=a-1$のとき，最小値$\sqrt{2a-1}$となり，

◀OP＞0より，OP^2が最小のとき，OPも最小となる。

③より，$y_1=a-1$のとき，$x_1=\pm\sqrt{2(a-1)}$
$1<a$より，$x_1 \neq 0$

◀$x_1 \neq 0$を確認。$x_1=0$であると，③より，$y_1=0$となり，
放物線①と円②は２点で接することはないから。





よって，放物線①と円②が異なる２点で接するとき，

$\sqrt{2a-1}=r$

（円の中心から放物線までの最短距離）＝（円の半径）
のとき，２点で接する

（次のページへつづく）↗

■ ブラウザのバック矢印で前の文書に戻って下さい。

《 解 答 書 》

□ □ 【円と直線 No. １３ｓ（６／７）】 －〈３枚目／３枚〉

（前のページからのつづき）

2 （答をまとめる）

したがって，

求めるａの値の範囲は，$1 < a$

ｒをａの式で表すと，$r = \sqrt{2a-1}$