

接線の方程式

◇ 《接線の方程式》 学力化 →

★解法の技術★

円 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ 上の点 $P(4, 6)$ における接線の方程式を求めよ。

【考え方】

▶ 円の接線の方程式

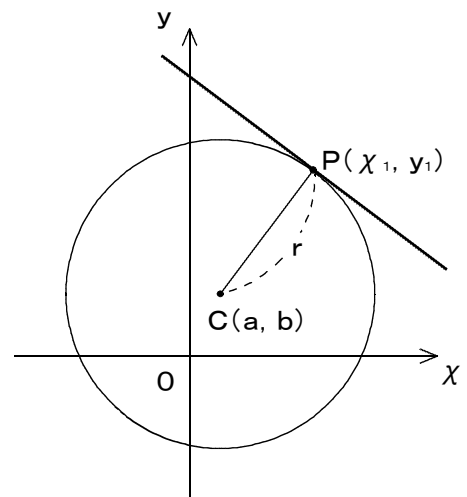
円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は,

$$x_1 x + y_1 y = r^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は,

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

中心 $C(a, b)$ が原点 $(0, 0)$ になるようにグラフを平行移動をすることで, ①の公式から②の公式を導くことができる。



[答 案]

【解き方 1】 接線の公式の利用

円の中心の座標は $(a, b) = (1, 2)$ であるから,

$x_1 = 4, y_1 = 6, r^2 = 25$ を,

接線の公式②に代入して,

$$(4 - 1)(x - 1) + (6 - 2)(y - 2) = 25$$

$$\underline{3x + 4y = 36}$$

【解き方 2】 1点と傾きの与えられた直線の方程式の利用

○ (全体の解法の方針)

一般に, 直線の方程式は, 傾きとその直線上の1点の座標が分かれば求まる。

そこで,

「接線は半径に直交する」という性質から 半径の傾きを使って接線の傾きを求め, その 接線の傾きと接線上にある接点の座標を使って接線の方程式を求める。

□ □ 【円と直線 No. 1 2 s (1/4)】 - 〈2枚目/4枚〉

➡ (前のページからのつづき)

① (接線の傾きを求める)

接点を $P(4, 6)$ とするとき、
 円の中心 $C(1, 2)$ と結んだ直線 CP と接線とは直交する。

CP の傾きは、 $\frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3}$ であるから、

接線の傾きを m とすれば、

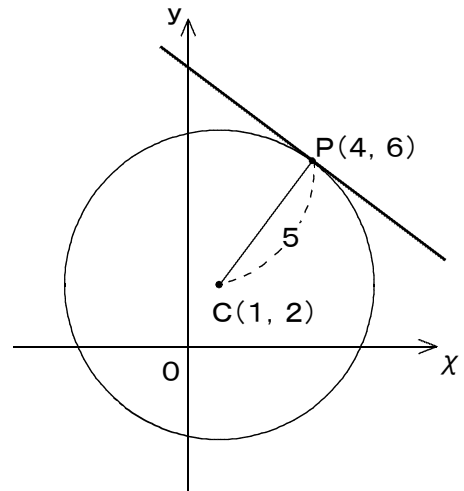
$$\frac{4}{3} m = -1 \text{ より、 } m = -\frac{3}{4} \quad \leftarrow m \cdot m' = -1$$

② (接線の方程式を求める)

したがって、求める接線の方程式は、

$$y - 6 = -\frac{3}{4}(x - 4)$$

すなわち、 **$3x + 4y = 36$**



【解き方3】「点と直線の距離=円の半径」の方程式の利用

① (全体の解法の方針)

一般に、直線の方程式は、傾きとその直線上の1点の座標が分かれば求まる。

そこで、

求める接線の傾きを m とおき、円の中心と接線の距離を m を使って表し、

これが半径と等しいとする方程式を作り、 m を求める。

次に、その接線の傾き m と接線上にある接点の座標を使って接線の方程式を求める。

① (接線の傾きを求める)

◀ 点と直線の距離の公式を利用する。

接点 $P(4, 6)$ を通る接線の傾きを m とすれば、

$$y - 6 = m(x - 4) \text{ すなわち、 } mx - y - 4m + 6 = 0 \quad \dots \textcircled{1} \quad \leftarrow \text{接線の方程式}$$

円の中心 $C(1, 2)$ から接線までの距離 CP は円の半径に等しいから、

$$\frac{|m \cdot 1 + (-1) \cdot 2 - 4m + 6|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 5$$

$$|-3m + 4| = 5\sqrt{m^2 + 1}$$

両辺を2乗して、

$$(-3m + 4)^2 = 25(m^2 + 1)$$

整理すると、

$$9m^2 - 24m + 16 = 25m^2 + 25$$

$$16m^2 + 24m + 9 = 0$$

$$(4m + 3)^2 = 0 \text{ より、 } m = -\frac{3}{4}$$

◀ 直線までの距離 $CP =$ 円の半径

◀ 点 (x_1, y_1) と

直線 $ax + by + c = 0$ の距離は

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

□ □ 【円と直線 No. 1 2 s (1/4)】 - 〈3枚目/4枚〉

➡ (前のページからのつづき)

② (接線の方程式を求める)

これを①に代入して,

$$\left(-\frac{3}{4}\right)x - y - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 6 = 0$$

$$-3x - 4y + 12 + 24 = 0$$

$$\underline{3x + 4y = 36}$$

【解き方4】接点⇔重解という性質の利用

① (全体の解法の方針)

一般に、直線と円が接するための条件は、2つのグラフの式を連立してできる2次方程式の判別式が0になるときである。

そこで,

点P(4, 6)を通る接線の傾きをmとおいて接線の方程式を作り,

与えられた円の方程式とその接線の方程式を連立して、xについての2次方程式を作り、その判別式をDとおく。

D=0を解いてmの値を求める。

次に、その接線の傾きmと接線上にある接点の座標を使って接線の方程式を求める。

① (接線の傾きを求める)

◀2次方程式の判別式D=0を利用する。

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25 & \dots \textcircled{1} \\ mx - y - 4m + 6 = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

◀【解き方3】の①の式を利用する。

②をyについて解いて,

$$y = mx - 4m + 6 \quad \dots \textcircled{2}'$$

②' を①に代入して,

$$(x-1)^2 + (mx - 4m + 6 - 2)^2 = 25$$

$$(x-1)^2 + (mx - 4m + 4)^2 = 25$$

ここで,

$$(mx - 4m + 4)^2$$

$$= (mx)^2 + (-4m)^2 + 4^2 + 2(mx)(-4m) + 2(-4m) \cdot 4$$

$$+ 2 \cdot 4(mx)$$

$$= m^2x^2 + 16m^2 + 16 - 8m^2x - 32m + 8mx$$

$$\underline{x^2 - 2x + 1} + \underline{m^2x^2 + 16m^2 + 16 - 8m^2x - 32m + 8mx} - 25 = 0$$

$$(m^2 + 1)x^2 + (-2 - 8m^2 + 8m)x + (1 + 16m^2 + 16 - 32m - 25) = 0$$

$$(m^2 + 1)x^2 - 2(4m^2 - 4m + 1) + (16m^2 - 32m - 8) = 0$$

$$(m^2 + 1)x^2 - 2(4m^2 - 4m + 1) + 8(2m^2 - 4m - 1) = 0$$

(次のページへつづく) ➡

□ □ 【円と直線 No. 1 2 s (1/4)】 - 〈4枚目/4枚〉

➡ (前のページからのつづき)

2 (mの値を求める)

◀ xの2次方程式の判別式を利用する。

このxについての2次方程式の判別式をDとすると、

$$\frac{D}{4} = (4m^2 - 4m + 1)^2 - 8(m^2 + 1)(2m^2 - 4m - 1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} & \cdot (4m^2 - 4m + 1)^2 \\ & = (4m^2)^2 + (-4m)^2 + 1^2 + 2(4m^2)(-4m) + 2(-4m) \cdot 1 \\ & \hspace{15em} + 2 \cdot 1(4m^2) \end{aligned}$$

$$= 16m^4 + 16m^2 + 1 - 32m^3 - 8m + 8m^2$$

$$= 16m^4 - 32m^3 + 24m^2 - 8m + 1$$

$$\cdot 8(m^2 + 1)(2m^2 - 4m - 1)$$

$$= 8(2m^4 - 4m^3 - m^2 + 2m^2 - 4m - 1)$$

$$= 16m^4 - 32m^3 + 8m^2 - 32m - 8$$

$$= 16m^4 - 32m^3 + 24m^2 - 8m + 1 - 16m^4 + 32m^3 - 8m^2 + 32m + 8$$

$$= 16m^2 + 24m + 9$$

$$= (4m + 3)^2$$

直線②が円①と接するための条件は $D = 0$ であるから、

$$(4m + 3)^2 = 0$$

$$\text{よって、 } m = -\frac{3}{4}$$

3 (接線の方程式を求める)

これを②に代入して、

$$\left(-\frac{3}{4}\right)x - y - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 6 = 0$$

$$-3x - 4y + 12 + 12 = 0$$

$$\underline{\underline{3x + 4y = 24}}$$