

接線の方程式

★知識の整理★

【1】円の接線の方程式

原点Oを中心とする半径rの円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点P( $x_1, y_1$ )における接線 $l$ の方程式を考えてみよう。

[1]  $x_1 \neq 0, y_1 \neq 0$ の場合

直線OPの傾きは $\frac{y_1}{x_1}$ で、接線 $l$ は半径OPに垂直である

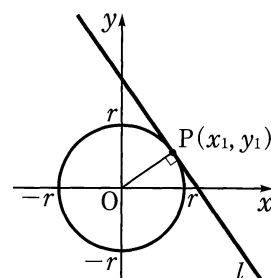
から、 $l$ の傾きは $-\frac{x_1}{y_1}$ となり、その方程式は、

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1} (x - x_1)$$

分母を払って整理すると、 $x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2$

点P( $x_1, y_1$ )が円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上にあることにより、 $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ であるから、接線の方程式は、

$$x_1 x + y_1 y = r^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

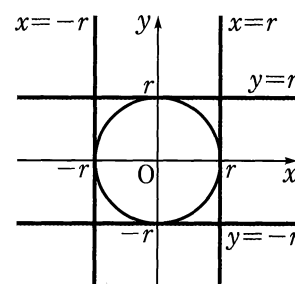


[2]  $x_1 = 0$ の場合

$y_1 = \pm r$ で、接線の方程式は、  
 $y = r$  または  $y = -r$

[3]  $y_1 = 0$ の場合

$x_1 = \pm r$ で、接線の方程式は、  
 $x = r$  または  $x = -r$



[2], [3]の場合も①を満たすから、まとめると次のようになる。

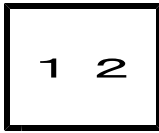
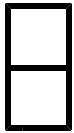
►円の接線の方程式

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点( $x_1, y_1$ )における接線の方程式は、  
 $x_1 x + y_1 y = r^2$

(例) 円 $x^2 + y^2 = 5$ 上の点(-1, 2)における接線の方程式は、  
 $(-1) \cdot x + (2) \cdot y = 5$  すなわち  $-x + 2y = 5$

【コラム】直線の決定

- [1] 1点の座標と傾きが分かれば、直線の式を求めることができる。(公式の利用)
- [2] 2点の座標が分かれば、直線の式を求めることができる。(連立方程式の利用)



第2章 図形と方程式 2・円と直線

**2** 円と直線 (その4)

(2 / 6) ■ 円の接線(1) ■

◇ 《接線の方程式》 **学力化** → /

★解法の技術★

円  $x^2 + y^2 = 13$  上の点  $(3, -2)$  における接線の方程式を求めなさい。

【考え方】 1点の座標と傾き が分かれば、直線の方程式を求めることができます。

(例) 点  $(x_1, y_1)$  を通り、傾きが  $m$  の直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

【解き方1】 接線の方程式の利用

[考える手順]

**1** 接線の公式を使う

[答 案]

$x_1 = 3, y_1 = -2, r^2 = 13$  を  
接線の公式  $x_1 x + y_1 y = r^2$  に代入して、  
 **$3x - 2y = 13$**

【解き方2】 1点と傾きの与えられた直線の方程式の利用

[考える手順]

\* 全体の解法の方針

**1** 接線の傾きを求める  
(傾き: 半径に垂直)

**2** 接線の方程式を求め  
る

[答 案]

1点の座標と傾き分かれば、直線の方程式を求めることができるので接線の傾きを求める。

「接線は半径に直交する」という性質から半径の傾きを使って接線の傾きを求め、接線の方程式を求める。

接点を  $P(3, -2)$  とするとき、  
円の中心  $O$  と結んだ直線  $OP$  と接線とは直交する。  
接線の傾きを  $m$  とすれば、

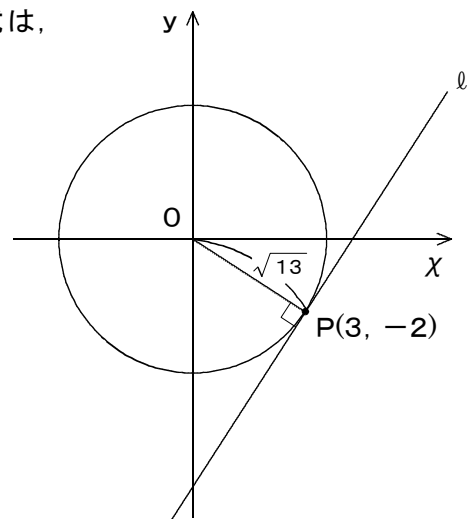
$$-\frac{2}{3} \cdot m = -1 \quad \text{より、} \quad m = \frac{3}{2} \quad \leftarrow m \cdot m' = -1$$

したがって、求める接線の方程式は、

$$y + 2 = \frac{3}{2}(x - 3)$$

$$2y + 4 = 3x - 9$$

$$\mathbf{3x - 2y - 13 = 0}$$



(次のページへつづく) ↗

□ □ 【円と直線 No. 1 2 (2/6)】 - 〈2枚目/2枚〉

➔ (前のページからのつづき)

【解き方3】「点と直線の距離=円の半径」の方程式の利用

[考える手順]

\* 全体の解法の方針

1 接線の傾きを求める  
点と直線の距離の  
公式を利用する

2 接線の方程式を求め  
る

[答 案]

1 点の座標と傾きが分かれば、直線の方程式を求めることができるので接線の傾きを求める。

傾きを  $m$  とし、円の中心と接線の距離を  $m$  を使って表し、これが半径と等しいとする方程式を作り、 $m$  を求め、接線の方程式を求める。

接点  $(3, -2)$  を通る直線は、傾きを  $m$  とすれば、

$$y + 2 = m(x - 3) \quad \text{すなわち、} \quad mx - y - 3m - 2 = 0$$

原点からの直線までの距離が円の半径に等しいから、

$$\frac{|m \cdot 0 + (-1) \cdot 0 - 3m - 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{13}$$

両辺を2乗して、

$$\frac{(3m + 2)^2}{m^2 + 1} = 13$$

$$(3m + 2)^2 = 13(m^2 + 1)$$

$$9m^2 + 12m + 4 = 13m^2 + 13$$

$$4m^2 - 12m + 9 = 0$$

$$(2m - 3)^2 = 0$$

$$m = \frac{3}{2}$$

したがって、求める接線の方程式は、

$$y + 2 = \frac{3}{2}(x - 3)$$

$$2y + 4 = 3x - 9$$

$$\underline{\underline{3x - 2y - 13 = 0}}$$